K305 T

PHẠM PHU (Chủ biên) – PHẠM VĂN CHÓNG

KIẾN THỨC
CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO
ĐẠI SỐ
VÀ GIẢI TÍCH 11

THEO CHƯƠNG TRÌNH PHÂN BAN THPT

(Tái bản lần thứ hai)

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
ĐVV / 13203 / 13

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc ĐINH NGỌC BẢO
Tổng biên tập ĐINH VĂN VANG

Chịu trách nhiệm nội dung và bản quyền:
TRUNG TÂM VĂN HÓA TRÀNG AN

Biên tập nội dung:
LÊ VĂN HIỆN

Trình bày bìa:
PHẠM HUỆ

KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

Mã số: 02.02.30/128.PT2013

In 1000 cuốn, khổ 16 x 24 cm, tại TT CN in - Cty Khảo sát và Xây dựng
Đăng kí KHXB số: 454-2013/CXB/30-17/ĐHSP ngày 05/04/2013
In xong và nộp lưu chiểu năm 2013

Lời nói đầu

Tiếp theo cuốn ***Kiến thức cơ bản và nâng cao Toán 10***, đến lớp 11, với môn học này chúng tôi biên soạn thành hai cuốn sách riêng biệt: ***Kiến thức cơ bản và nâng cao Hình học 11; Kiến thức cơ bản và nâng cao Đại số và Giải tích 11***. Chúng tôi làm như vậy do nội dung môn Toán lớp 11 khá lớn, nếu trình bày đầy đủ trong một cuốn thì sách sẽ quá dày không tiện lợi cho người sử dụng. Hơn nữa, người sử dụng chính (học sinh) nhiều khi chỉ có nhu cầu bổ sung thêm cho mình một trong hai phần toán học không mấy liên quan với nhau này. Mặt khác, trong thực tế từ trước tới nay ở nước ta đều có hai bộ sách giáo khoa riêng về *Hình học* và *Đại số và Giải tích*. Ở một số nước còn tách riêng cả phần *Lượng giác* ra khỏi *Đại số*. Dưới đây, chúng tôi xin trình bày cấu trúc của cuốn ***Kiến thức cơ bản và nâng cao Đại số và Giải tích 11*** để bạn đọc thuận tiện sử dụng và theo dõi.

Cuốn sách được viết thành hai phần chính:

Phần I: ***Lí thuyết*** và ***Đề bài tập;***

Phần II: ***Lời giải - Hướng dẫn - Đáp số***

Trong phần đầu, mỗi chương gồm các mục: I, II,... mỗi mục La Mã này có ba nội dung chính: ***A. Lí thuyết cần nhớ; B. Các ví dụ mẫu*** và ***C. Đề bài tập*** bao gồm một mục, một số mục hoặc một số phần của một mục trong sách giáo khoa lớp 11 phân ban mới.

Trong các ví dụ mẫu và một số đề bài tập, chúng tôi có trích một số đề thi Đại học, Cao đẳng trong những năm gần đây ở trong nước và nước ngoài.

Các bài tập ở nội dung C được đánh số thứ tự 1, 2,... theo mỗi chương (khác với cuốn sách lớp 10 được đánh số cho đến hết phần đầu).

Phần ***Lời giải - Hướng dẫn - Đáp số*** bao gồm các lời giải, hướng dẫn mang tính gợi ý hoặc đáp số đối với các bài tập đưa ra trong nội dung C. Để học tốt và sử dụng có hiệu quả cuốn sách, sau khi đọc nhanh nội dung A, các em nên làm bài tập ở nội dung C, sau đó nếu cần có thể xem nội dung B, cuối cùng mới xem hướng dẫn giải ở phần sau.

Ngoài hai phần chính trên đây, trong sách còn có hai phần phục vụ ***Ôn tập cuối năm*** ở cuối sách là: ***A. Đề bài tập*** (gồm 25 đề bài với khoảng 100 bài tập) và ***B. Lời giải; Hướng dẫn; Đáp số***.

Cuốn sách này xuất bản lần đầu vào năm 2007; tái bản lần thứ nhất năm 2009. Do có nội dung tốt, mang giá trị thiết thực, nên hiện nay sách vẫn đang được học sinh, thầy cô giáo và các vị phụ huynh cần đến. Vì vậy, Nxb *Đại học Sư phạm* quyết định cho tái bản lần thứ hai cuốn sách này.

Mong rằng, cuốn ***Kiến thức cơ bản và nâng cao Đại số và Giải tích 11*** tiếp tục góp phần quan trọng giúp các em học sinh lớp 11 học và ôn tốt hơn môn học này theo hướng chủ động, sáng tạo. Thầy cô giáo và các vị phụ huynh cũng có thể dùng cuốn sách này làm tài liệu tham khảo để hướng dẫn các em học môn *Đại số và Giải tích* một cách thuận lợi, đạt hiệu quả cao hơn.

Xin trân trọng cảm ơn!

CÁC TÁC GIẢ

PHẦN I. LÍ THUYẾT VÀ ĐỀ BÀI TẬP

Chương I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. HÀM SỐ TUẦN HOÀN VÀ CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. LÍ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Hàm số tuần hoàn

a) Định nghĩa : Hàm số f(x) có tập xác định D được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có :

i) $x - T \in D$ và $x + T \in D$

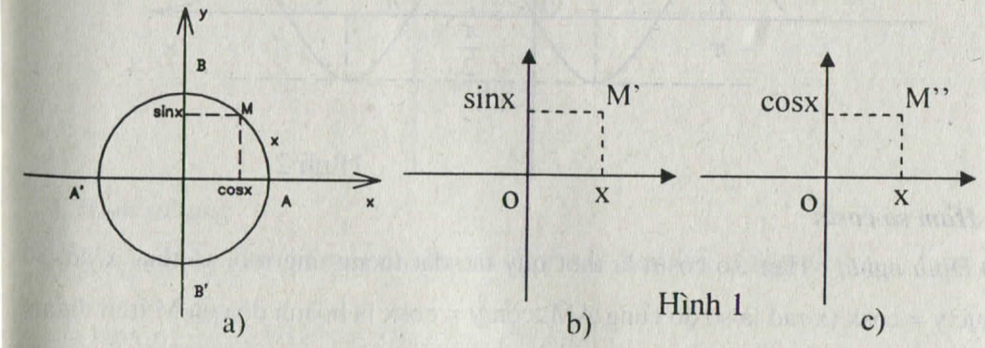
ii) $f(x + T) = f(x)$

Số $T > 0$ nhỏ nhất thoả mãn các tính chất trên được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn f(x).

b) Đồ thị : Để vẽ đồ thị của hàm số tuần hoàn chu kì T, ta chỉ cần vẽ đồ thị của nó trên đoạn [a ; a + T]. Sau đó thực hiện liên tiếp các phép tịnh tiến theo các vectơ $\vec{v}$, $2\vec{v}$,..., $-\vec{v}$, $-2\vec{v}$ (với a là số bất kì , $\vec{v} = (T; 0)$ không đổi) ta được toàn bộ đồ thị của f(x).

2. Hàm số sin

a) Định nghĩa: Hàm số sin là một quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực y = sinx (ở đây x (rad) là số đo của cung AM, còn y = sinx là tung độ của điểm M trên đường tròn lượng giác) (h1.a)



Hình 1

- Biểu diễn x trên trục hoành và sinx trên trục tung ta được (h.1b)

$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to y = \sin x$

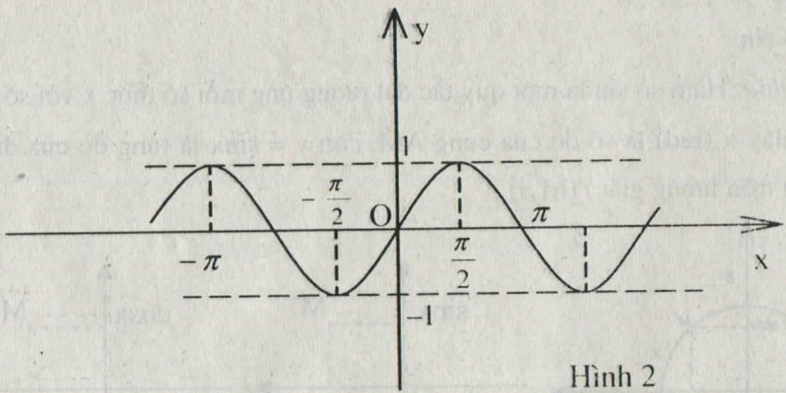
b) Một số tính chất

- Hàm số sin có tập xác định là $D = \mathbb{R}$
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ
- $-1 \leq \sin x \leq 1$ (tập giá trị là $[-1 ; 1]$
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π

c) Sự biến thiên : Trong một chu kì $[-\pi ; \pi]$ có bảng biến thiên

X	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
y = sinx	0 ↘	−1 ↗	1 ↘	0

d) Đồ thị : Vẽ đồ thị trong một chu kì $[-\pi ; \pi]$, sau đó tịnh tiến nó song song với trục hoành từng đoạn có độ dài 2π, ta được (h.2)



Hình 2

3. Hàm số cosin

a) Định nghĩa : Hàm số cosin là một quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực y = cosx (x rad là số đo cung AM, còn y = cosx là hoành độ của M trên đường tròn lượng giác) (h.1a)

Biểu diễn x trên trục hoành và cosx trên trục tung ta được (h.1c)

$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to y = \cos x$

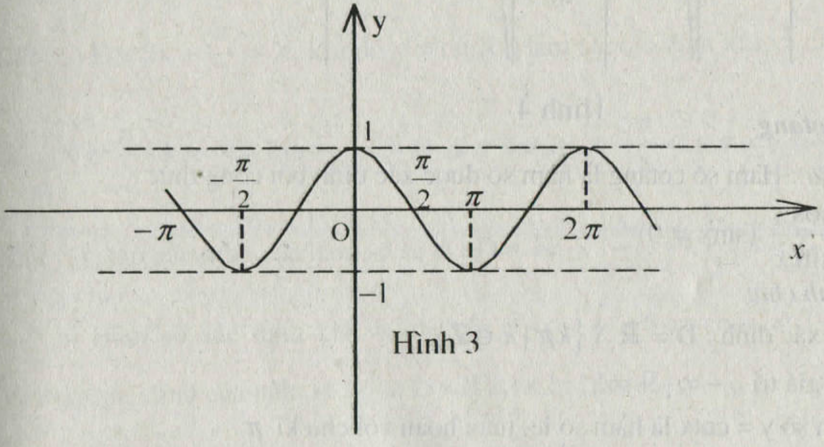
b) Một số tính chất :

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$
- Tập giá trị là $[-1 ; 1]$ $(-1 \leq \cos x \leq 1)$
- Hàm số y = cosx là hàm số chẵn, tuần hoàn với chu kì 2π

c) Sự biến thiên: Trong một chu kì $[-\pi ; \pi]$ có bảng biến thiên

X	$-\pi$	0	π
y = cosx	−1 ↗	1 ↘	−1

d) Đồ thị: Vì với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có đẳng thức $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ nên đồ thị của hàm số y = cosx thu được từ đồ thị của hàm số y = sinx bằng cánh tịnh tiến song song với trục Ox sang trái một đoạn có độ dài $\frac{\pi}{2}$ (h.3)



Hình 3

4. Hàm số tang

a) Định nghĩa: Hàm số tang là hàm số được xác định bởi công thức

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (\cos x \neq 0)$$

b) Một số tính chất

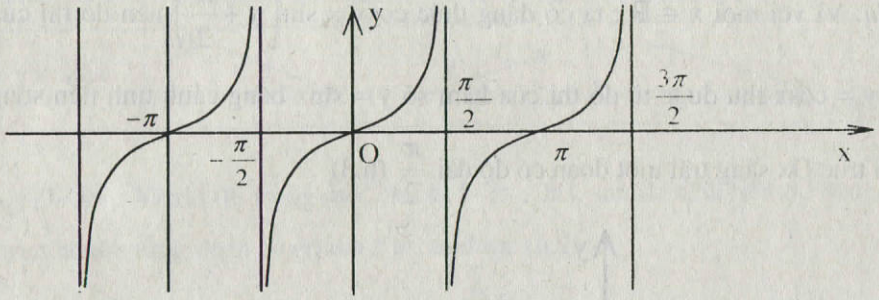
- Tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

- Tập giá trị là $(-\infty ; +\infty)$
- Hàm số y = tanx là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kì π

c) Sự biến thiên: Trong một chu kì $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ có bảng biến thiên

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
y = tanx	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

d) Đồ thị : (h.4)



Hình 4

5. Hàm số cotang

a) Định nghĩa : Hàm số cotang là hàm số được xác định bởi công thức

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (\sin x \neq 0)$$

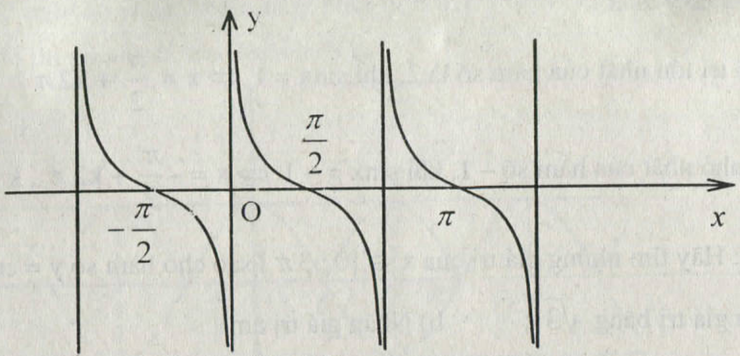
b) Một số tính chất

- Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- Tập giá trị $(-\infty ; +\infty)$
- Hàm số y = cotx là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kì π

c) Sự biến thiên

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
y = cotx	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

d) Đồ thị : (h.5)



Hình 5

B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1: Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{7}\right)$; b) $y = \frac{2 + \sin x}{\cos x - 1}$; c) $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{3 - x}}$

Giải: a) Đặt $2x + \frac{\pi}{7} = X$, khi đó y = tanX. Hàm số xác định khi và chỉ khi X thoả mãn $X \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{7} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow 2x \neq \frac{5\pi}{14} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{5\pi}{28} + k\frac{\pi}{2}$.

Như vậy, tập xác định của hàm số sẽ là : $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{28} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi$.

Vậy tập xác định của hàm số đó là $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Hàm số xác định khi $\frac{1 + \cos x}{3 - x} \geq 0$ (*) nhưng do $-1 \leq \cos x \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq 1 + \cos x \leq 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, nên để thoả mãn (*) $3 - x > 0 \Leftrightarrow x < 3$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty ; 3)$

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt{4,5(1 + \sin x)} - 1$

Giải: Từ $-1 \leq \sin x \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$0 \le 1 + \sin x \le 2 \Leftrightarrow 0 \le 4{,}5\,(1 + \sin x) \le 9 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{4{,}5(1+\sin x)} \le 3$.

Từ đó $-1 \le y \le 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 2, khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số – 1, khi $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 3: Hãy tìm những giá trị của $x \in [0\,;\,3\pi]$ sao cho hàm số y = cotx

a) Nhận giá trị bằng $\sqrt{3}$; b) Nhận giá trị âm.

Giải: a) Do tính nghịch biến của hàm số y = cotx, nên $x = \dfrac{\pi}{6}$ là giá trị duy nhất trên $[\,0\,;\,\pi\,]$ sao cho $\cot\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$. Ngoài ra, vì hàm số cotx tuần hoàn với chu kì π nên trên $[\,0\,;\,3\pi\,]$ còn hai giá trị nữa của x : $x = \pi + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6}$ và $x = 2\pi + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{13\pi}{6}$ có cotang bằng $\sqrt{3}$.

Vậy trên $[\,0\,;\,3\pi\,]$ có ba giá trị : $\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{7\pi}{6}$ và $\dfrac{13\pi}{6}$ có cotang bằng $\sqrt{3}$.

b) Từ đồ thị của hàm số y = cotx (h.5) ta thấy hàm số nhận giá trị âm trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$. Vì hàm số đó tuần hoàn với chu kì π nên trên $[\,0\,;\,3\pi\,]$ còn hai khoảng nữa mà trên đó hàm số nhận giá trị âm, đó là $\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$ và $\left(\dfrac{5\pi}{2};3\pi\right)$.

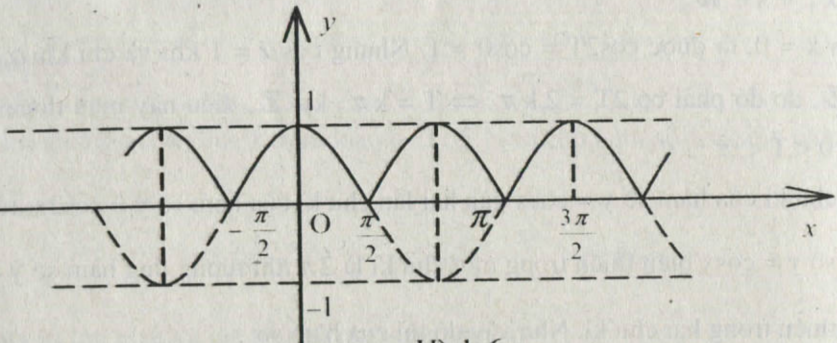
Ví dụ 4: Dựa vào đồ thị của hàm số y = cosx, hãy:

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = |\cos x|$. Dựa vào đó nhận xét về tính chẵn lẻ, tính tuần hoàn của nó.

b) Vẽ đồ thị của hàm số y = – 2cosx ;

c) Vẽ đồ thị của hàm số y = cos2x;

Giải: a) Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ được suy ra từ đồ thị của hàm số y = f(x) bằng cách giữ nguyên phần đồ thị nằm phía trên trục hoành, lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị phía dưới trục hoành. Vậy

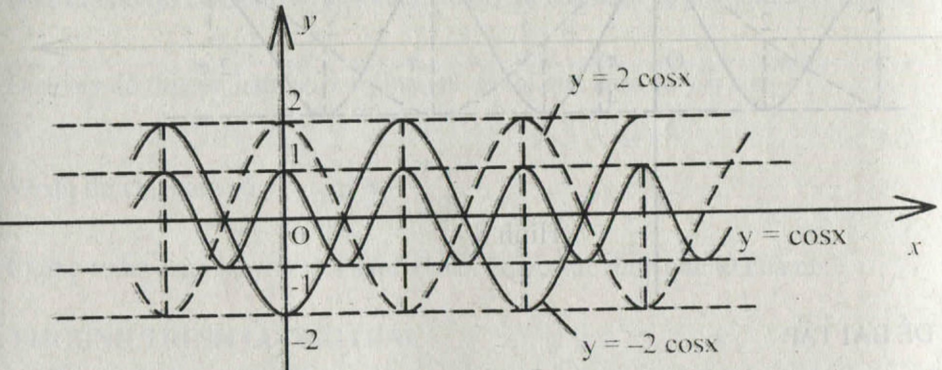


Hình 6

Ta có đồ thị của hàm số $y = |\cos x|$ trên hình 6.

Từ đồ thị ta thấy hàm số $y = |\cos x|$ tuần hoàn với chu kì π, chẵn.

b) Trước hết ta vẽ đồ thị của hàm số y = 2cosx, đồ thị này được suy ra từ đồ thị của hàm số y = cosx bằng cách dãn trục tung 2 lần (vì 2 > 1), được hiểu là mỗi tung độ của các điểm trên đồ thị được tăng lên 2 lần (xuống dưới hoặc lên trên tuỳ theo tung độ đó âm hay dương)



Hình 7

Sau đó từ đồ thị của hàm số y = 2cosx suy ra đồ thị của hàm số y = – 2cosx bằng cách lấy đối xứng qua trục hoành. Trên (h.7) đồ thị của hai hàm số y = cosx và y = 2cosx vẽ nét đứt, còn đồ thị của hàm số y = – 2cosx vẽ nét liền.

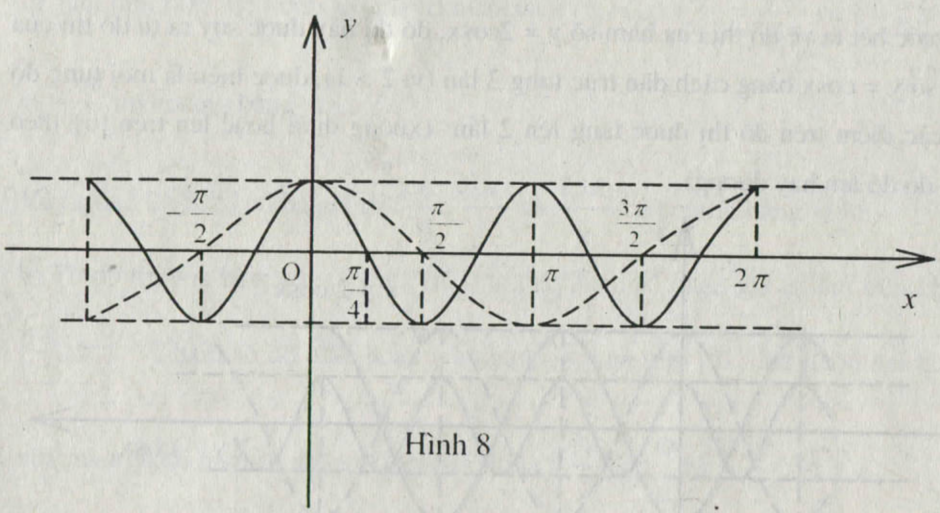
c) Trước hết ta hãy chứng minh rằng hàm số y = cos2x tuần hoàn với chu kì là π.

Ta có $f(x) = \cos 2x = \cos(2x + 2\pi) = \cos 2(x + \pi) = f(x + \pi)$ (*) $\forall x \in \mathbb{R}$. Ta hãy chứng minh rằng π là số dương nhỏ nhất thoả mãn tính chất : $\cos 2(x + T) = \cos 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Chọn x = 0, ta được $\cos 2T = \cos 0 = 1$. Nhưng $\cos\alpha = 1$ khi và chỉ khi $\alpha = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, do đó phải có $2T = 2.k\pi \Leftrightarrow T = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $0 < T < \pi$

Vậy chu kì của hàm số y = cosx gấp hai lần chu kì của hàm số y = cos2x. tức là khi hàm số y = cosx biến thiên trong một chu kì là 2π thì tương ứng hàm số y = cos2x biến thiên trong hai chu kì. Như vậy đồ thị của hàm số

y = cos2x suy ra từ đồ thị của hàm số y = cosx bằng cách co trục hoành 2 lần (h.8). Đồ thị của y = cos2x biển thị nét liền



Hình 8

C. ĐỀ BÀI TẬP

1. Hãy khoanh vào câu trả lời đúng. Hàm số y = f(x) = – 2 là hàm số

A) Tuần hoàn với chu kì – 2; B) Tuần hoàn với chu kì $\frac{1}{10}$

C) Không tuần hoàn ; D) Tuần hoàn nhưng không có chu kì

2. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \cot\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$; b) $y = \sqrt{\frac{1 + \sin x}{3x - 5}}$

c) $y = \tan\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$; d) $y = \sqrt{\frac{x^2 + 5x + 4}{1 + \cos x}}$

3. Hãy tìm những giá trị của x trên đoạn [– 3 ; 5] sao cho hàm số y = sinx nhận giá trị :

a) Bằng $-\frac{1}{2}$; b) Bằng 0 ; c) Âm ; d) Dương

4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $y = -4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 7$; b) $y = \sqrt{4 + 5\sin x} + 2$

5. Dựa vào tính đồng biến của hàm số y = tanx trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ hãy tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của nó trên $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]$.

6. Dựa vào đồ thị của hàm số y = cotx, vẽ đồ thị của hàm số $y = |\cot x|$

7. Dựa vào đồ thị của hàm số y = sinx, vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin\frac{x}{2}$

8. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

9. Chứng minh rằng hàm số y = tan3x tuần hoàn, xác định chu kì của nó.

II. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A. LÍ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Các chú ý chung

a) Phương trình lượng giác là phương trình chứa ẩn số ở các hàm số lượng giác ở vế trái, vế phải hoặc cả hai vế. Giải phương trình lượng giác là tìm tất cả các giá trị của ẩn số thoả mãn phương trình đã cho. Các phương trình lượng giác thường có vô số nghiệm (do tính tuần hoàn của các hàm số lượng giác).

b) Ngoài các công thức biến đổi nên nhớ giá trị lượng giác của những góc đặc biệt : $0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \pi$ vì nhiều bài tập cũng như bài thi liên quan đến các giá trị này

c) Khi giải các phương trình lượng giác phải lưu ý đến đơn vị đo cung (góc): chỉ được sử dụng một loại đơn vị đo (hoặc độ hoặc radian), tuyệt đối không sử dụng lẫn lộn cả hai loại đơn vị trong một công thức.

d) Khi giải phương trình lượng giác nên đưa phương trình về cùng một loại cung :

$x, 2x, \frac{3}{2}x, \ldots, f(x)$

e) Nên áp dụng linh hoạt các phép biến đổi tương đương để đưa về phương trình chỉ chứa một hàm số lượng giác.

2. Các phương trình lượng giác cơ bản

Học sinh phải nắm chắc cách giải bốn phương trình cơ bản dưới đây vì đối với các phương trình lượng giác dù có rất phức tạp đều phải cố gắng tìm cách áp dụng các công thức biến đổi để đưa về bốn loại phương trình này.

a) *Phương trình* $\sin x = a$

- Với $|a| > 1$, phương trình vô nghiệm
- Với $|a| \le 1$, phương trình có nghiệm là $x = \left[\begin{array}{l}\arcsin a + k2\pi \\ \pi - \arcsin a + k2\pi\end{array}\right.$,$k \in \mathbb{Z}$,

  trong đó arcsin a (đọc là ác-sin-a) là cung $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ có $\sin\alpha = a$
- Nếu α = arcsina được đo bằng độ thì nghiệm của phương trình có dạng

$$x = \left[\begin{array}{l}\alpha + k360^0 \\ 180^0 - \alpha + k360^0\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

- Với a = 1, a = – 1 và a = 0 thì nghiệm của phương trình có dạng đơn giản hơn, mà học sinh nên nhớ. Cụ thể :

Với a = 1 thì $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ (hoặc $x = 90^0 + k360^0$)

Với a = – 1 thì $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ (hoặc $x = -90^0 + k360^0$)

Với a = 0 thì $x = k\pi$ (hoặc $x = k180^0$)

b) *Phương trình* $\cos x = a$

- Với $|a| > 1$, phương trình vô nghiệm
- Với $|a| \le 1$, phương trình có nghiệm là $x = \pm$ arccosa + $k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

  trong đó arccosa (đọc là ác -cosin -a) là cung $\alpha \in [0, \pi]$ có $\cos\alpha = 0$
- Nếu α = arccosa được đo bằng độ thì nghiệm của phương trình có dạng $x = \pm$ arccosa + $k360^0$, $k \in \mathbb{Z}$
- Với a = 1 thì phương trình $\cos x = 1$ có nghiệm là $x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- Với a = – 1 thì phương trình $\cos x = 1$ có nghiệm là $x = (2k + 1)\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
- Với a = 0, phương trình $\cos x = 0$ có nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

c) *Phương trình* $\tan x = a$

- Điều kiện của phương trình : $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Nghiệm của phương trình là: x = arctana + $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, trong đó arctana (đọc là ác-tang-a) là cung $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ thoả mãn $\tan\alpha = a$
- Nếu arctana = α được đo bằng độ thì nghiệm của phương trình có dạng $x = \alpha + k180^0$, $k \in \mathbb{Z}$

d) *Phương trình* $\cot x = a$

- Điều kiện của phương trình : $x \ne k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Nghiệm của phương trình là: x = arccota + $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, trong đó arccota (đọc là ác - cotang - a) là cung $\alpha \in (0, \pi)$ thoả mãn $\cot\alpha = a$.
- Nếu arccota = α được đo bằng độ thì nghiệm của phương trình có dạng $x = \text{arccot}\,\alpha + k180^0$, $k \in \mathbb{Z}$

3. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác trên đường tròn lượng giác : Trong nhiều trường hợp, nhất là khi nghiệm có nhiều dạng khác nhau, nên biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác để có thể hình dung cách sắp xếp tập nghiệm (gồm vô hạn phần tử) và từ đó xét xem có thể gộp các nghiệm đó lại cho gọn hơn hay không.

4. Giải các phương trình lượng giác cơ bản bằng máy tính bỏ túi

Hiện nay nhiều học sinh đã được trang bị máy tính bỏ túi nên có thể dùng chúng để giải các phương trình lượng giác cơ bản. Tuy nhiên, cần lưu ý rằng đối với các phương trình sinx = a, cosx = a, tanx = a và cotx = a máy chỉ cho nghiệm tương ứng là x = arcsina, x = arccosa, x = arctana và x = arccota. Khi đó ta viết các nghiệm là:

- $x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + k2\pi \\ \pi - \arcsin a + k2\pi \end{array}\right.$, k $\in \mathbb{Z}$, ứng với phương trình sinx = a
- $x = \pm \arccos a + k2\pi$, k $\in \mathbb{Z}$, ứng với phương trình cosx = a
- $x = \arctan a + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ($x = \operatorname{arccot} a + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) ứng với phương trình tanx = a (cotx = a)

5. Một số phương trình lượng giác thường gặp

a) *Phương trình bậc n* ($n \geq 1$) đối với một hàm số lượng giác . Trong chương trình của lớp 11 hiện nay chỉ xét các phương trình bậc nhất và bậc hai và các phương trình mà khi giải nhờ các phép biến đổi có thể đưa về phương trình bậc nhất hoặc bậc hai đối với một hàm số lượng giác nào đó. Tuy vậy, ở đây xét một cách tổng quát đối với $n \in N^*$ bất kì và phương pháp chung là đặt hàm số lượng giác có trong phương trình bằng t (với điều kiện nào đó) để đưa phương trình đã cho về phương trình bậc n đối với t. Sau khi tìm nghiệm của phương trình đối với ẩn t, ta giải các phương trình lượng giác cơ bản ứng với các nghiệm t thoả mãn điều kiện đã đặt.

b) *Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx*

Đó là phương trình có dạng :

asinx + bcosx = c , trong đó a, b, $c \in \mathbb{R}$ và $ab \neq 0$

Để giải phương trình này có thể biến đổi vế trái của nó thành : $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$ hoặc $\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$ để đưa về phương trình lượng giác cơ bản. Ngoài ra cũng có thể áp dụng công thức tính sinx và cosx theo $t = \tan\frac{x}{2}$ để đưa phương trình đã cho về một phương trình bậc 2 đối với t.

Dễ dàng thấy rằng phương trình vô nghiệm nếu $|c| > \sqrt{a^2+b^2}$ (hay $c^2 > a^2 + b^2$)

Chú ý : Giải B bằng cách trên có thể giải phương trình tổng quát hơn, đó là: $a\sin\omega x + b\cos\omega x = c$ với a, b, c, $\omega \in \mathbb{R}$.

c) *Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx*

Tuy không có trong chương trình lớp 11, nhưng các học sinh khá trở lên nên biết. Đó là phương trình có dạng : $a\sin^2x + b\sin x\cos x + c\cos^2x = 0$

Ta chỉ xét trường hợp a, c không đồng thời bằng 0, vì ngược lại ta có phương trình

$\sin x.\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}$

- Với $a \neq 0$ thì $\cos x \neq 0$ (vì nếu cosx = 0 thì phương trình vô nghiệm). Chia cả hai vế của phương trình đã cho cho $\cos^2x$, ta được phương trình bậc hai đối với tanx : $a\tan^2x + b\tan x + c = 0$
- Với a = 0, ta có phương trình :

$B\sin x\cos x + c\cos^2x = 0 \Leftrightarrow \cos x(b\sin x + c\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0(*) \\ b\sin x + c\cos x = 0(**) \end{array}\right.$, các phương trình (*), (**) đã biết cách giải

Chú ý :

i) Đối với phương trình $a\sin^2x + b\sin x\cos x + c\cos^2x = d$, với $d \neq 0$ ta có thể đưa về phương trình đã biết bằng cách đặt $d = d(\cos^2 + \sin^2x)$ rồi chuyển sang bên trái và rút gọn.

ii) Khi giải phương trình dạng đã cho, có thể dùng các công thức hạ bậc, nhưng khuyên không nên vì sẽ cồng kềnh hơn.

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
ĐVL 13203 13

6. Khi gặp các phương trình lượng giác không thuộc các dạng trên, phức tạp hơn thì :

- Cố gắng đưa về các dạng đã biết thông qua các công thức biến đổi (góc nhân đôi, góc nhân ba, tính theo tang của góc chia đôi, tổng thành tích, tích thành tổng, hạ bậc,...), các hệ thức cơ bản cùng với các hệ quả của chúng.
- Có thể áp dụng phương pháp đặt ẩn phụ một cách linh hoạt.
- Có thể biến đổi để đưa về phương trình tích.

B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1: Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos(x + 15^0) = -\dfrac{1}{2}$

c) $\tan 3x = -5$; d) $\cot 5x = \cot\dfrac{3\pi}{5}$

Giải: a) Vì $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$ nên $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$

b) Vì $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 120^0$ nên $\cos(x + 15^0) = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x + 15^0 = \pm 120^0 + k360^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 105^0 + k360^0 \\ x = -135^0 + k360^0 \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$

c) $\tan 3x = -5 \Leftrightarrow 3x = \arctan(-5) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}\arctan(-5) + \dfrac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

d) $\cot 5x = \cot\dfrac{3\pi}{5} \Leftrightarrow 5x = \dfrac{3\pi}{5} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{25} + \dfrac{k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 2: Giải các phương trình

a) $\tan\left(2x + \dfrac{\pi}{8}\right) = -1$; b) $\cos\left(3x + \sqrt{7}\right) = \dfrac{1}{2}$

c) $\cot(3 - 4x) = \sqrt{3}$; d) $\sin(45^0 - 2x) = \dfrac{3}{4}$

Giải:

Coi các biểu thức trong các dấu ngoặc là các biến phụ, ta có các kết quả sau đây :

a) $\tan\left(2x + \dfrac{\pi}{8}\right) = -1 \Leftrightarrow 2x + \dfrac{\pi}{8} = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\dfrac{3\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

b) Vì $\arccos\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$ nên $\cos\left(3x + \sqrt{7}\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 3x + \sqrt{7} = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

$\Leftrightarrow 3x = \pm\dfrac{\pi}{3} - \sqrt{7} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{9} - \dfrac{\sqrt{7}}{3} + k\dfrac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

c) Vì $\text{arccot}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{6}$ nên $\cot(3 - 4x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3 - 4x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$

$\Leftrightarrow 4x = 3 - \dfrac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4} - \dfrac{\pi}{24} + k\dfrac{\pi}{4}$ $(k \in \mathbb{Z})$

d) $\sin(45^0 - 2x) = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow 45^0 - 2x = \left[\begin{array}{l} \arcsin\dfrac{3}{4} + k360^0 \\ 180^0 - \arcsin\dfrac{3}{4} + k360^0 \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 22^0 30' - \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{3}{4} + k180^0 \\ x = -67^0 30' + \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{3}{4} + k180^0 \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$, trong đó $\arcsin\dfrac{3}{4}$ được đo bằng độ (có thể dùng máy tính bỏ túi để tính cụ thể)

Ví dụ 3: Giải các phương trình lượng giác

a) $3\sin x + 2\sin 2x = 0$; b) $7\cos x + 3\sin 2x = 0$

Giải: Áp dụng công thức nhân đôi : $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, ta được

a) $3\sin x + 2\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 3\sin x + 4\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x(3 + 4\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0(*)\\ \cos x = -\dfrac{3}{4}(**)\end{array}\right. \qquad (*) \Leftrightarrow x = k\pi,\ k\in \mathbb{Z};$$

$$(**) \Leftrightarrow x = \pm \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + k2\pi,\ k\in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là:

$$\left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \pm\arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right) + k2\pi\end{array}\right.,\ k\in \mathbb{Z}$$

b) $7\cos x + 3\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 7\cos x + 6\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(7 + 6\sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in \mathbb{Z}$ (còn $7 + 6\sin x = 0$ vô nghiệm).

Ví dụ 4 : Giải các phương trình

a) $2\cos^2 x + 7\cos x + 3 = 0$;

b) $3\tan^3 x - \left(18 - \sqrt{3}\right)\tan^2 x + \left(15 - 6\sqrt{3}\right)\tan x + 5\sqrt{3} = 0$

c) $2\sin^4 x + 5\sin^2 x - 3 = 0$

Giải: Đây là các phương trình bậc n (tương ứng với n = 2, 3, 4) đối với một hàm số lượng giác. Đặt các ẩn phụ tương ứng ta được

a) Đặt $t = \cos x$ ($|t| \le 1$). Phương trình đã cho được đưa về dạng

$$2t^2 + 7t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = -\dfrac{1}{2}\\ t = -3 \quad \text{(loại)}\end{array}\right. \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$$

Vậy ta có phương trình $\cos x = -\dfrac{1}{2}$. Vì $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 120^0$, nên nghiệm của phương trình là $x = \pm 120^0 + k360^0,\ k \in \mathbb{Z}$

b) Đặt t = tanx, ta có phương trình

$$3t^3 - \left(18 - \sqrt{3}\right)t^2 + \left(15 - 6\sqrt{3}\right)t + 5\sqrt{3} = 0 \quad (*)$$

Ta thấy $3 - \left(18 - \sqrt{3}\right) + \left(15 - 6\sqrt{3}\right) + 5 = 0$ nên (*) có 1 nghiệm là t = 1. Bằng cách chia vế phải của (*) cho (t – 1), ta được :

$$(*) \Leftrightarrow (t - 1)\left(3t^2 - \left(15 - \sqrt{3}\right)t - 5\sqrt{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = 1\\ t = 5\\ t = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = 5\\ \tan x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \arctan 5 + k\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi\end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}$$

c) Đặt $t = \sin^2 x$ ($0 \le t \le 1$), ta được phương trình

$$2t^2 + 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = -3 \quad \text{(loại)}\\ t = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Vậy ta có phương trình $\sin^2 x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi\\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi\end{array}\right.,k\in \mathbb{Z}$

Biểu diễn các nghiệm trên đường tròn lượng giác (h.8), ta thấy có thể gộp các nghiệm trên thành một biểu thức : $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ k\in \mathbb{Z}$.

Ta có thể đi đến kết quả này bằng cách hạ bậc vế trái, ta có :

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k\in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 5: Giải các phương trình

a) $\sin 2x + \cos 2x = -1$; b) $12\cos x - 5\sin x = -13$

Giải: Đây là loại phương trình bậc nhất đối với sin và cosin

a) Chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt{2}$, ta được

$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Vì $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$ nên ta có thể viết

$$\cos\frac{\pi}{4}.\sin 2x + \sin\frac{\pi}{4}.\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ \frac{5\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

b) Chia cả 2 vế của phương trình cho $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$, ta được

$\frac{12}{13}\cos x - \frac{5}{13}\sin x = -1$. Đặt $\frac{12}{13} = \cos\alpha$ và $\frac{5}{13} = \sin\alpha$, ta có

$\cos\alpha\cos x - \sin\alpha\sin x = -1 \Leftrightarrow \cos(\alpha + x) = -1 \Leftrightarrow \alpha + x = (2k+1)\pi \Leftrightarrow x =$ $-\alpha + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, trong đó $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\sin\alpha = \frac{5}{13}$

Ví dụ 6: Giải các phương trình

a) $\sin^2 x - 3\sin x\cos x = -1$;   b) $4\sin^2 x + \sin 2x = 4$

Giải: Dễ dàng biến đổi các phương trình trên về phương trình thuần nhất đối với sinx và cosx.

a) Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \sin^2 x - 3\sin x\cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$. Ta thấy $\frac{\pi}{2} + k\pi$ không phải là nghiệm của phương trình, nên chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$, ta được

$$2\tan^2 x - 3\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

trong đó $\alpha = \arctan\frac{1}{2}$

b) Thay $4 = 4(\cos^2 x + \sin^2 x)$ và $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, ta được:

$4\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 4\sin^2 x - 4\cos^2 x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\sin x - 2\cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0(*) \\ \sin x - 2\cos x = 0(**) \end{array}\right.$$

$(*) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$(**) \Leftrightarrow \tan x = 2$ (vì $\cos x \neq 0$) $\Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) trong đó $\alpha = \arctan 2$.

Ví dụ 7: Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x - 12(\sin x + \cos x) - 12 = 0$;   b) $4\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x = \frac{3}{2}$

Giải: Đây là những phương trình không thuộc các dạng đã biết. Nhưng bằng cách biến đổi ta có thể đưa về dạng (gọi là đối xứng với sinx và cosx) :

$a\sin x\cos x + b(\sin x \pm \cos x) + c = 0$. Tiếp đó đặt $\sin x \pm \cos x = t$ ($|t| \leq \sqrt{2}$) để đưa về phương trình bậc hai đối với t.

a) Vì $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, nên phương trình đã cho là đối xứng đối với sinx và cosx.

Đặt $\sin x + \cos x = t \Rightarrow t^2 - 12t - 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 13 \end{array}\right.$ (loại)

Vậy ta có: $\sin x + \cos x = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi(2k+1) \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) Ta có $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x.\cos\frac{\pi}{4} + \cos x.\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$. Thay vào phương trình đã cho, rồi rút gọn, ta được phương trình

$$4\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 4\sin x\cos x = 3$$

Đặt $\sin x + \cos x = t$ ($|t| \leq \sqrt{2}$), ta có phương trình sau đối với t :

$$2t^2+4\sqrt{2}\,t-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ t=-\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy ta có :

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{12}+k2\pi \\ x=\dfrac{7\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 8: Giải các phương trình sau:

a) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \dfrac{1}{\cos x}$; b) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$;

c) $2\sin 11x + \sqrt{3}\cos 7x + \sin 7x = 0$

Giải: Ta thấy các phương trình này không có dạng đã biết, ta phải linh hoạt biến đổi chúng để đưa về các phương trình tương đương có dạng quen thuộc.

a) Trước hết phải đặt điều kiện: $\cos x \neq 0$. Với điều kiện này chia cả hai vế của phương trình cho cosx và áp dụng công thức: $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$ ta được

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \sqrt{3}\,\frac{\cos x}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \tan x + \sqrt{3} = 1 + \tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x - \tan x + 1 - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = \dfrac{1+\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2} = \tan\alpha \\ \tan x = \dfrac{1-\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2} = \tan\beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k\pi \\ x=\beta+k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

b) Áp dụng công thức $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha$ (các em tự chứng minh, xuất phát từ hệ thức cơ bản $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, hoặc xem lời giải của bài tập 144a của cuốn "Tổng hợp kiến thức cơ bản và nâng cao Toán 10"), sau đó dùng công thức hạ bậc, ta được :

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \cos 4x \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2} = \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = 1 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

c) Vì $\sqrt{3} = \tan\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}$, nên ta có: $\sqrt{3}\cos 7x + \sin 7x = \dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos 7x + \sin 7x$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{3}\cos 7x + \cos\frac{\pi}{3}\sin 7x}{\frac{1}{2}} = 2\sin\left(7x+\frac{\pi}{3}\right).$$

Thay vào phương trình đã cho ta được:

$$\sin 11x + \sin\left(7x+\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin 11x = -\sin\left(7x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(7x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin(-11x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x+\dfrac{\pi}{3}=-11x+k2\pi \\ 7x+\dfrac{\pi}{3}=\pi+11x+k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{54}+k\dfrac{\pi}{9} \\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 9 : Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m

a) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = m$;

b) $\sin^2 x - \sin 2x + m\cos^2 x = 0$

Giải: Nội dung biện luận là tìm xem với các giá trị nào của tham số m thì phương trình vô nghiệm, với các giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm và khi đó nghiệm bằng bao nhiêu.

a) Thay $\sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$, ta được : $\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\sin x + \cos x = m$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{3}.\sin x + \cos\frac{\pi}{3}\cos x = m.\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{m}{2} \ (*)$$

Dễ dàng thấy rằng :

- Nếu $\left|\frac{m}{2}\right| > 1 \Leftrightarrow |m| > 2$ thì (*) vô nghiệm, do đó phương trình đã cho vô nghiệm
- Nếu $\left|\frac{m}{2}\right| \le 1 \Leftrightarrow |m| \le 2$ thì đặt $\frac{m}{2} = \cos\alpha$, ta được:

$$(*) \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \pm \alpha + k2\pi \ (**).$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm khi $|m| > 2$ và có nghiệm (**) khi $|m| \le 2$

b) Rõ ràng ở đây $\cos x \neq 0$, vì nếu $\cos x = 0$ thì $\sin x = 0$ và khi đó không có giá trị x nào để cho cả cosx lẫn sinx đều bằng 0.

Chia cả hai vế cho $\cos^2 x$ và đặt $t = \tan x$ ta được:

$$t^2 - 2t + m = 0 \ (*)$$

Đây là phương trình bậc 2 đối với t với $\Delta' = 1 - m$. Từ đó suy ra:

- Nếu $1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì (*) vô nghiệm, tức là phương trình đã cho vô nghiệm
- Nếu $1 - m \ge 0 \Leftrightarrow m \le 1$ thì : $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \tan x = 1 - \sqrt{1-m} = \tan\alpha \\ t = \tan x = 1 + \sqrt{1-m} = \tan\beta \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k\pi \\ x = \beta + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z} \ (**)$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm khi $m > 1$ và có nghiệm là (**) khi $m \le 1$

C. ĐỀ BÀI TẬP

10. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$;

b) $\sin(3x + 20^0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\sin 2x = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$;

d) $\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 0$

e) $\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).\tan\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = 1$;

f) $\sin 4x = \cos 5x$.

11. Giải các phương trình sau:

a) $\tan(3x - 1) = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

b) $\cot(2x - 45^0) = 1$

c) $\cos(x - 5) = \cos(1 + 2x)$;

d) $\sin^2(x - 45^0) = \cos^2(3x + 90^0)$

e) $\sin(3x + 2) = \sin(x + 1)$

12. Giải các phương trình sau:

a) $\sin(x^2 - 4x) = 0$;

b) $\cos(x^2 + 2) = 0$;

c) $\tan(x^2 + 4x + 5) = \tan 3$;

d) $2\cos(2\cos x) = \sqrt{3}$

e) $\cot(x^2 + 1) = 1$;

f) $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\cos \pi x\right) = \frac{1}{2}$

13. Giải các phương trình sau:

a) $3\sin^4 x + 5\sin^2 x - 8 = 0$;

b) $\tan^3 x - 3\tan^2 x - 2\tan x + 4 = 0$

c) $7\sin^2 x - 8\cos x = 8$;

d) $5\cot^2 x + 12\cot x + 7 = 0$

e) $2\cos^2 x - (2 + \sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} = 0$

14. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 3x + \sin 2x - \sin x = 0$;

b) $\cos 2x + 4\sin x = 4$

c) $\sin 3x + 2\cos 2x - 2 = 0$;

d) $3\cos x - |\cos x| + 5 = 0$

15. Giải các phương trình sau:

a) $3\sin x + 4\cos x = 5$;

b) $2\sin x - 2\cos x = 1 - \sqrt{3}$

c) $5\cos 3x + 2\sqrt{6}\sin 3x = -\frac{7}{2}$;

d) $3\sin 4x - 2\cos 4x = 4$

16. Giải các phương trình sau:

a) $4\sin^2x + 3\sqrt{3}\sin2x - 2\cos^2x = 4$; b) $6\sin^2x - \sin x\cos x - \cos^2x = 3$

c) $\sin2x + 2\cot x = 3$; d) $-\cos^3x + 2\sin x - 3\sin^2x\cos x = 0$

17. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x + 2\sin2x + 1 = \cos x$; b) $\sin x + \cos x = 1 - \sin2x$

c) $\left(1+\sqrt{2}\right)(\sin x + \cos x) - \sin2x = 1 + \sqrt{2}$

18. Giải các phương trình sau:

a) $\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}\right)$

b) $1 + \cos2x + \cos4x = \sin2x + \sin4x + \sin6x$

c) $\sin3x\,.\sin2x = \sin11x\,.\sin10x$

d) $\cos10x\,.\cos6x = \cos^2 8x$

19. Giải các phương trình sau:

a) $3\tan2x - 4\tan3x = \tan2x\,.\,\tan^2 3x$

b) $\tan^2x\,.\,\cot^2 2x\cot3x = \tan^2x - \cot^2 2x + \cot3x$

c) $2\cot2x - 3\cot3x = \tan2x$

20. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm

a) $\sin^2x + m\cos^2x - \sin x\cos x = 0$

b) $(m+1)\sin^2x - \sin2x + \cos2x = 0$

c) $(3m-2)\sin^2x - (5m-2)\sin2x + 3(2m+1)\cos^2x = 0$

d) $2m\sin x + (m+1)\cos x = \frac{m}{\cos x}$

21. Cho phương trình

$$(2\sin x - 1)(2\cos2x + 2\sin x + m) = 3 - 4\cos^2x$$

a) Giải phương trình với $m = 1$

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có đúng 2 nghiệm thoả mãn điều kiện $0 \le x \le \pi$

22. Tìm m để phương trình $\cos3x = m\cos x$ có nghiệm: $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Các bài tập sau đây là các câu hỏi trắc nghiệm. Học sinh hãy khoanh vào phương án (trong số các phương án đưa ra) mà em cho là đúng.

23. Nghiệm của phương trình $\cos^2x + \sin^2 2x = 1$ là:

A) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$; B) $x = k\pi$; C) $x = k\frac{\pi}{3}$; D) $\left[\begin{array}{l} x = k\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right.$

E) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

24. Phương trình $\sin x + m\cos x = 1$ có nghiệm khi và chỉ khi :

A) $|m| \ge 1$; B) $m \le -1$; C) $\forall m$; D) $m < 0$; E) $m \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$

25. Nghiệm của phương trình $\cos2x = 1 + \cos4x$ là (với $k \in \mathbb{Z}$)

A) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$; B) $x = k\frac{\pi}{3}$; C) $x = k2\pi$; D) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

E) $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$

26. Với $k \in \mathbb{Z}$, nghiệm của phương trình $\cos x.\sin x + |\cos x + \sin x| = 1$ là

A) $x = k2\pi$; B) $x = (2k+1)\pi$; C) $x = k\frac{\pi}{2}$; D) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$;

E) $x = k\pi$

III. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

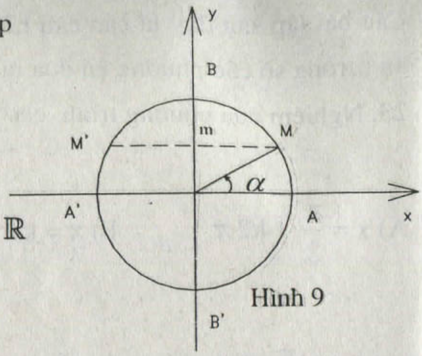
A. LÍ THUYẾT CẦN NHỚ

Khi giải các bất phương trình lượng giác, nói chung ta dùng các công thức lượng giác để biến đổi và đưa về một trong 16 bất phương trình lượng giác cơ bản: $\sin x > m$, $\sin x \ge m$, $\sin x < m$, $\sin x \le m$,..., (tương tự đối với các hàm số cosin, tang và cotang). Ở đây trình bày tỉ mỉ cho bốn bất phương trình cơ bản : $\sin x > m$, $\cos x > m$, $\tan x > m$ và $\cot x > m$.

Đối với các bất phương trình còn lại phương pháp giải hoàn toàn tương tự.

1. Bất phương trình : $\sin x > m$ (1)

- Nếu $m > 1$ thì (1) vô nghiệm
- Nếu $m < -1$ thì (1) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$
- Trong trường hợp $|m| \leq 1$, ta đặt

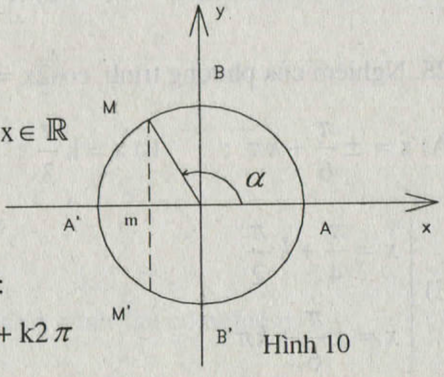


Hình 9

$m = \sin\alpha \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$, và dựa vào đường tròn lượng giác (h.9), ta có

$\sin x > \sin\alpha \Leftrightarrow \alpha + k2\pi < x < \pi - \alpha + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$, $\overset{\frown}{MBM'}$)

2. Bất phương trình : $\cos x > m$ (2)



Hình 10

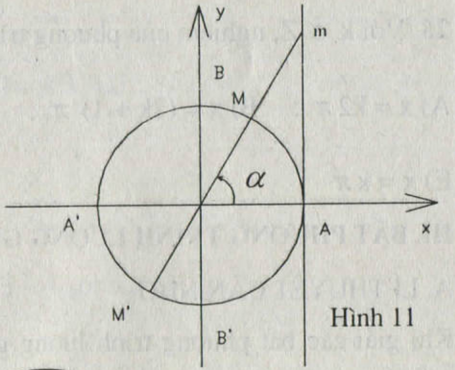
- Nếu $m > 1$ thì (2) vô nghiệm
- Nếu $m < -1$ thì (2) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$
- Trong trường hợp $|m| \leq 1$, ta đặt

$m = \cos\alpha$ với $0 \leq \alpha \leq \pi$, rồi dựa vào đường tròn lượng giác (h.10), ta có :

$\cos x > \cos\alpha \Leftrightarrow -\alpha + k2\pi < x < \alpha + k2\pi$

($k \in \mathbb{Z}$, $\overset{\frown}{M'AM}$)

3. Bất phương trình : $\tan x > m$ (3)



Hình 11

Để giải bất phương trình ta đặt $m = \tan\alpha$,

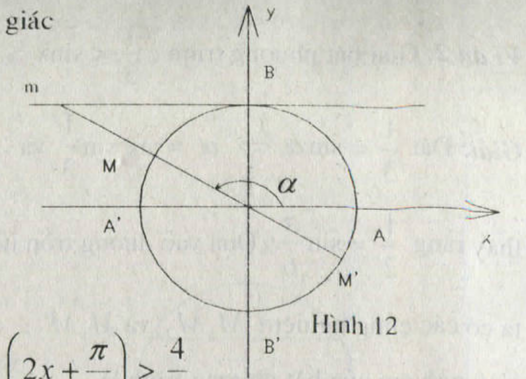
với $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$. Dựa vào đường tròn lượng giác (h .11), ta có:

$\tan x > \tan\alpha \Leftrightarrow$

$\alpha + k2\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$, $\overset{\frown}{MB}$ và $\overset{\frown}{M'B}$)

4. Bất phương trình : $\cot x > m$ (4)

Để giải (4), đặt $m = \cot\alpha$, với



Hình 12

$0 < \alpha < \pi$, dựa vào đường tròn lượng giác (h.12) và trục cotang ta có:

$\cot x > \cot\alpha \Leftrightarrow k\pi < x < \alpha + k\pi$

($k \in \mathbb{Z}$, $\overset{\frown}{ABM}$ và $\overset{\frown}{A'B'M'}$)

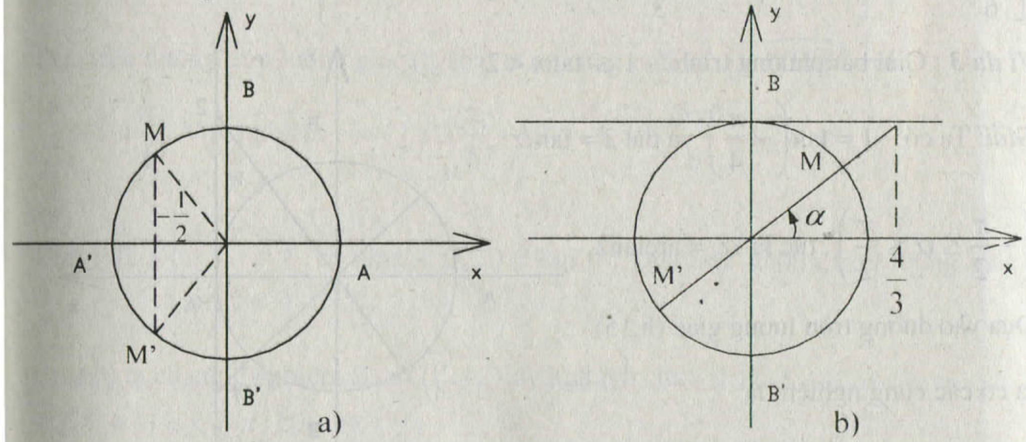
B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $\cos(3x - 15^0) \geq -\dfrac{1}{2}$ b) $\cot\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) > \dfrac{4}{3}$

Giải:

a) Ta có $-\dfrac{1}{2} = \cos 120^0$. Dựa vào đường tròn lượng giác (h.13a) ta được :



a) b)

Hình 13

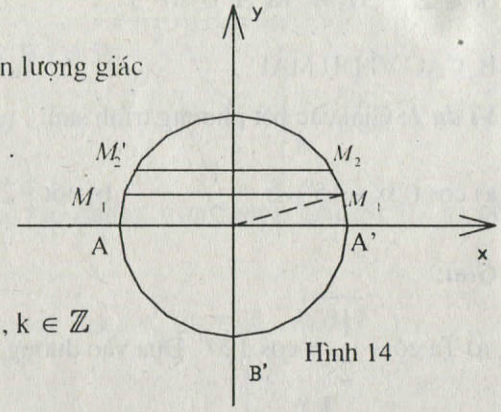
$\cos(3x - 15^0) \geq \cos 120^0 \Leftrightarrow -120^0 + k.360^0 \leq 3x - 15^0 \leq 120^0 + k.360^0$
($\overset{\frown}{M'AM}$) $\Leftrightarrow -105^0 + k.360^0 \leq 3x \leq 135^0 + k\,360^0$
$\Leftrightarrow -35^0 + k\,120^0 \leq x \leq 45^0 + k\,120^0$ ($k \in \mathbb{Z}$).

b) Đặt $\dfrac{4}{3} = \cot\alpha$ ($0 < \alpha < \pi$), tức là $\alpha = \text{arc cot}\dfrac{4}{3}$. Dựa vào đường tròn lượng giác (h.13b) ta có các cung nghiệm là $\overset{\frown}{AM}$ và $\overset{\frown}{A'M'}$. Vậy nghiệm của bất phương trình là:

$$k\pi < 2x + \frac{\pi}{3} < \text{arc cot}\frac{4}{3} + k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} < x < \frac{1}{2}\,\text{arc cot}\frac{4}{3} - \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình : $\frac{1}{3} < \sin x \le \frac{1}{2}$

Giải: Đặt $\frac{1}{3} = \sin\alpha \Leftrightarrow \alpha = \arcsin\frac{1}{3}$ và thấy rằng $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$. Dựa vào đường tròn lượng giác ta có các cung nghiệm M_1M_2 và $M_1'M_2'$.



Hình 14

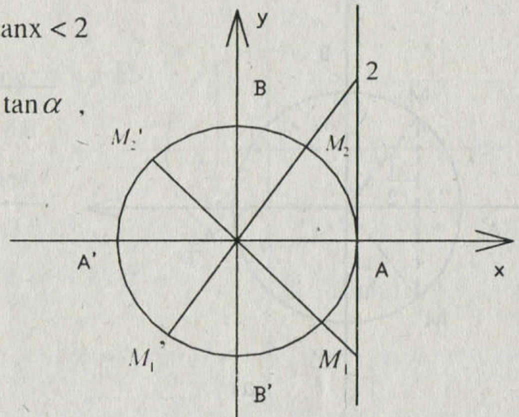
Vậy nghiệm của bất phương trình là

$$\left[\begin{array}{l} \arcsin\frac{1}{3} + k2\pi < x \le \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{5\pi}{6} + k2\pi \le x < \pi - \arcsin\frac{1}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 3 : Giải bất phương trình $-1 \le \tan x < 2$

Giải: Ta có $-1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ và đặt $2 = \tan\alpha$, $\left(-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}\right)$, tức là $\alpha = \arctan 2$.

Dựa vào đường tròn lượng giác (h.15) ta có các cung nghiệm là M_1M_2 và $M_1'M_2'$. Vậy nghiệm của bất phương trình là: $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \arctan 2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)



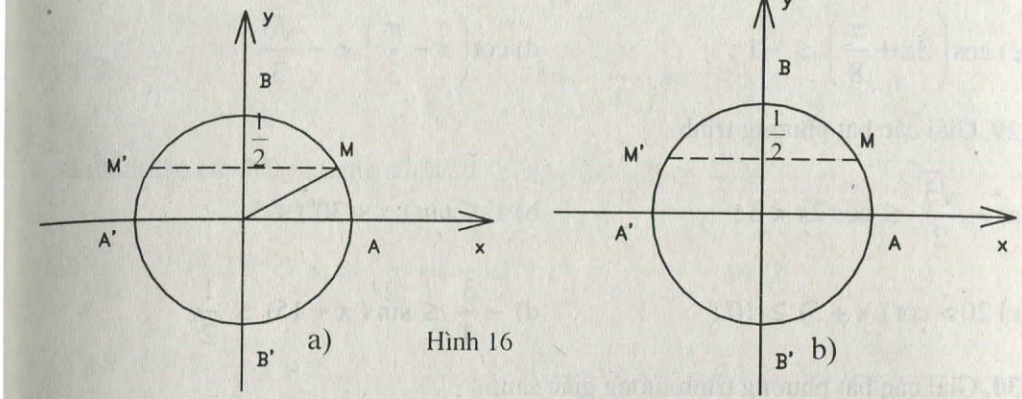
Hình 15

Ví dụ 4: Giải bất phương trình lượng giác : $\frac{1}{\sin x} \le 2$

Giải: Ta có bất phương trình tương đương : $\frac{1}{\sin x} - 2 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 2\sin x}{\sin x} \le 0$

$$\Rightarrow \text{hoặc} \begin{cases} 1 - 2\sin x \le 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \text{ (I) hoặc } \begin{cases} 1 - 2\sin x \ge 0 \\ \sin x < 0 \end{cases} \text{ (II)}$$

Ta có (I) $\begin{cases} \sin x \ge \frac{1}{2} \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x \ge \frac{1}{2}$.



Hình 16

Dựa trên đường tròn lượng giác (h.16a) ta có cung nghiệm là $\overset{\frown}{MBM'}$ với $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$. Vậy nghiệm của (I) là $\frac{\pi}{6} + k2\pi \le x \le \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ (*)

Giải (II) $\begin{cases} \sin x \le \frac{1}{2} \\ \sin x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x < 0$; $0 = \sin 0$. Dựa trên đường tròn lượng giác (h.16b) ta có cung nghiệm là $\overset{\frown}{A'B'A}$. Vậy nghiệm của (II) là :

$\pi(2k + 1) < x < \pi(2k + 2)$ (**)

Kết hợp (*) và (**) ta có nghiệm của bất phương trình đã cho là :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{6} + k2\pi \le x \le \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ \pi(2k+1) < x < \pi(2k+2) \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

C. ĐỀ BÀI TẬP

27. Giải các bất phương trình lượng giác sau:

a) $\sin 3x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos 5x < \cos\frac{2\pi}{3}$; c) $\tan x \le -3$

d) $\frac{1}{\cos 2x} \le \sqrt{2}$; e) $\cot 2x > \sqrt{3}$; f) $\sin(7x + 5) \ge 1{,}5$

28. Giải các bất phương trình

a) $\tan\left(3x-\frac{\pi}{6}\right) > 3$; b) $\sin(x+75^0) \le -\frac{1}{2}$

c) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{8}\right) \le -1$; d) $\cot\left(x-\frac{\pi}{3}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{3}$

29. Giải các bất phương trình

a) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le \cos 2x < 3$; b) $1 \le \tan(x+30^0) < 5$

c) $20 > \cot(x+5) \ge 10$; d) $-\frac{3}{4} \le \sin(x+15) \le \frac{1}{2}$

30. Giải các bất phương trình lượng giác sau;

a) $\cos^3x\sin3x+\sin^3x\cos3x \le \frac{3}{8}$; b) $\cos4x < \cos(\pi-2x)$

c) $\sin(\cos x) \ge 0$

31. Giải các bất phương trình

a) $\left|\sin x-\frac{1}{2}\right| < 1$; b) $\frac{\tan^2x-2}{\tan^2x-1} < \frac{1}{2}$; c) $\sin x\left(\cos x+\frac{1}{2}\right) \le 0$

32. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y=\frac{\sin x-2\cos x}{\sqrt{4\sin2x-\sin3x-\sin x}}$; b) $y=\sqrt{\cos x-\sin x-1}$

c) $y=\sqrt{2\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2x}$

Dưới đây là những câu hỏi trắc nghiệm, yêu cầu học sinh khoanh vào câu trả lời đúng.

33. Nghiệm của bất phương trình $\sin(2x+30^0) \ge \frac{1}{2}$ là

A) $k\pi \le x \le 60^0+k\pi$; B) $90^0+k180^0 \le x \le 210^0+k180^0$

C) $k180^0 \le x \le 60^0+k180^0$; D) $k360^0 \le x \le 120^0+k360^0$

34. Nghiệm của bất phương trình $\sin(\cos2x) \ge 0$ là

A) $\varnothing$; B) $-\frac{\pi}{4}+k2\pi \le x \le \frac{\pi}{4}+k2\pi$;

C) $\mathbb{R}$; D) $-\frac{\pi}{4}+k\pi \le x \le \frac{\pi}{4}+k\pi$

35. Nghiệm của bất phương trình : $2 \ge \sin(5x+3) \ge \frac{3}{2}$ là

A) $\frac{\pi}{10}-3+k2\pi \le x \le \frac{\pi}{10}+3+k2\pi$; B) $\varnothing$

C) $k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+k\pi$; D) $-3+k\frac{2\pi}{5} \le x \le 3+k\frac{2\pi}{5}$

36. Nghiệm của bất phương trình $\sin x.\cos5x > 0$ là

A) $\mathbb{R}$; B) $0 < x < \frac{\pi}{10}$;

C) $k\pi < x < \frac{\pi}{10}+k\pi$ và $\frac{3\pi}{10}+k\pi < x < \frac{\pi}{2}+k\pi$

D) $\frac{3\pi}{10}+k2\pi < x < \frac{\pi}{2}+k2\pi$

Chương II. TỔ HỢP VÀ KHÁI NIỆM XÁC SUẤT

I. HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Quy tắc cộng:

a) Giả sử có *hai tập hợp* hữu hạn A và B không giao nhau, trong đó tập A có n phần tử, tập B có m phần tử. Khi đó số cách chọn ra bất kỳ một phần tử thuộc A hoặc thuộc B, tức là thuộc một trong hai tập A hoặc B, là tổng số các phần tử của A và của B, tức là có m + n cách chọn.

b) Quy tắc cộng vừa nêu trên có thể phát biểu dưới dạng sau:

- Nếu một công việc nào đó có thể được tiến hành theo một trong hai phương án A hoặc B, trong đó phương án A có n cách thực hiện, phương án B có m cách thực hiện thì để tiến hành công việc đó sẽ có m + n cách thực hiện.

c) Mở rộng ra trường hợp nhiều phương án ta có quy tắc sau:

- Nếu một công việc nào đó có thể tiến hành theo một trong k phương án $A_1, A_2, \ldots A_k$, trong đó phương án A_1 có n_1 cách thực hiện, phương án A_2 có n_2 cách thực hiện,..., phương án A_k có n_k cách thực hiện thì để tiến hành công việc đó sẽ có $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ cách thực hiện.

2. Quy tắc nhân

a) Giả sử một công việc nào đó bao gồm hai công đoạn A và B, trong đó công đoạn A có n cách thực hiện, công đoạn B có m cách thực hiện thì để thực hiện công việc đó sẽ có n.m cách.

b) Mở rộng: Nếu một công việc bao gồm k công đoạn $A_1, A_2, \ldots A_k$, trong đó công đoạn A_1 có n_1 cách thực hiện, công đoạn A_2 có n_2 cách thực hiện,..., công đoạn A_k có n_k cách thực hiện thì để thực hiện công việc đó sẽ có $n_1 . n_2 \ldots n_k$ cách.

B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví *dụ 1*: Khối học sinh lớp 11 của một trường THPT có 150 học sinh nam và 180 học sinh nữ. Hỏi:

a) Có bao nhiêu cách chọn ra một học sinh lớp 11 đi dự trại hè của tỉnh?

b) Có bao nhiêu cách chọn ra một học sinh nam và một học sinh nữ của lớp 11 đi dự trại hè của tỉnh?

Giải: a) Để chọn ra một học sinh lớp 11 đi dự trại hè ta có thể chọn ra một học sinh nam trong tập hợp 150 học sinh nam với 150 cách chọn hoặc có thể chọn ra một học sinh nữ trong tập hợp 180 học sinh nữ với 180 cách. Do đó theo quy tắc cộng sẽ có 150 + 180 = 330 cách chọn ra một học sinh lớp 11 đi dự trại hè.

b) Ta coi việc chọn ra một học sinh nam và một học sinh nữ đi dự trại hè bao gồm hai công đoạn: công đoạn A là chọn ra một học sinh nam với 150 cách (chọn một trong 150 nam) và công đoạn B là chọn một học sinh nữ với 180 cách. Do đó theo quy tắc nhân sẽ có 150.180 = 27000 cách chọn ra một học sinh nam và một học sinh nữ lớp 11 đi dự trại hè.

Ví dụ 2: Có 2 chữ T, 3 chữ O, 4 chữ Á và 5 chữ N. Hỏi có thể tạo ra bao nhiêu từ TOÁN từ tất cả các chữ đã có?

Giải: Ta coi việc tạo ra từ TOÁN gồm 4 công đoạn:

Công đoạn 1: chọn ra 1 chữ T. Vì có 2 chữ T nên có 2 cách chọn;

Công đoạn 2: chọn ra 1 chữ O. Vì có 3 chữ O nên có 3 cách chọn;

Công đoạn 3: chọn ra 1 chữ Á. Vì có 4 chữ Á nên có 4 cách chọn;

Công đoạn 4: chọn ra 1 chữ N. Vì có 5 chữ N nên có 5 cách chọn;

Do đó theo quy tắc nhân sẽ có 2.3.4.5 = 120 từ TOÁN được tạo ra từ tất cả các chữ đã có.

Ví dụ 3: Dùng 10 chữ số từ 0 đến 9 và 26 chữ cái từ A đến Z để lập ra các dãy 8 ký tự mà mỗi kí tự có thể là một chữ số hoặc một chữ cái. Hỏi:

a) Có thể lập được bao nhiêu dãy kí tự như thế?

b) Có bao nhiêu biển số xe máy nếu biển số xe máy là một dãy 8 kí tự trong đó kí tự đầu tiên và kí tự thứ tư là chữ số khác 0, kí tự thứ ba là chữ cái, các kí tự còn lại là chữ số bất kỳ?

Giải: a) Vì mỗi ký tự của dãy được chọn ra trong 10 chữ số và 26 chữ cái nên theo quy tắc cộng có 10 + 26 = 36 cách chọn ra mỗi kí tự của dãy.

Ta coi việc tạo ta dãy 8 kí tự bao gồm 8 công đoạn mà mỗi công đoạn đều có 36 cách chọn. Do đó theo quy tắc nhân sẽ có:

$$36.36.36.36.36.36.36.36 = 36^8 \text{ dãy 8 kí tự.}$$

b) Để tạo ra một biển số xe máy cần qua 8 công đoạn. Ở công đoạn đầu tiên và công đoạn thứ tư đều có 9 cách chọn kí tự (chọn một trong 9 chữ số khác 0), công đoạn thứ ba có 26 cách chọn (chọn 1 trong 26 chữ cái từ A đến Z), ở mỗi công đoạn thứ hai, thứ năm, thứ sáu, thứ bảy và thứ tám đều có 10 cách chọn (chọn 1 trong 10 chữ số từ 0 đến 9). Do đó theo quy tắc nhân, ta có:

$$9.10.26.9.10.10.10.10 = 26.9^2.10^5 = 210\,600\,000 \text{ biển số xe máy.}$$

Ví dụ 4: Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số khác nhau?

Giải: Ký hiệu số cần lập là $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ với a_i là chữ số ở vị trí thứ $i(i=\overline{1,5})$

Do n là số tự nhiên nên $a_1 \neq 0$ và n là số chẵn nên a_5 chỉ có thể là các số 0, 2, 4, 6.

Ta xét các trường hợp sau:

*) $a_5 = 0$ thì $n = \overline{a_1a_2a_3a_4 0}$ Do đó:

a_1 có 6 cách chọn (chọn 1 trong 6 số từ 1 đến 6)

a_2 còn 5 cách chọn (chọn 1 trong 5 số từ 1 đến 6, trừ a_1)

a_3 có 4 cách chọn (chọn 1 trong 4 số từ 1 đến 6, trừ a_1 và a_2)

a_4 có 3 cách chọn (chọn 1 trong 3 số từ 1 đến 6, trừ a_1 , a_2 , a_3)

nên có 3.4.5.6 = 360 số n

**) $a_5 = 2$ thì $n = \overline{a_1a_2a_3a_4 2}$. Khi đó

a_1 có 5 cách chọn (chọn 1 trong 5 số 1, 3, 4, 5, 6)

a_2 có 5 cách chọn (chọn 1 trong 5 số gồm 0 và 4 số còn lại sau khi đã chọn a_1)

a_3 có 4 cách chọn;

a_4 có 3 cách chọn

nên có 3.4.5.5 = 300 số n.

Tương tự nếu $a_5 = 4$ (hoặc $a_5 = 6$) ta cũng có 300 số n.

Vì vậy có tất cả 360 + 300 + 300 + 300 =1260 số n cần lập.

C. ĐỀ BÀI TẬP

1. Có 2 loại sách : sách giáo khoa với 15 cuốn khác nhau và sách tham khảo với 20 cuốn khác nhau. Hỏi:

a) Có bao nhiêu cách chọn để mua mỗi loại một cuốn trong 2 loại sách trên?

b) Có bao nhiêu cách chọn mua mỗi loại một cuốn?

2. Dùng các số từ 0 đến 9 và 26 chữ cái từ A đến Z để tạo ra các dãy 6 kí tự mà mỗi kí tự là một chữ số hoặc một chữ cái.

a) Có thể tạo ra được bao nhiêu dãy 6 kí tự?

b) Nếu mật khẩu máy tính là dãy 6 kí tự trong đó có ít nhất một kí tự là chữ cái thì có thể tạo ra bao nhiêu dãy mật khẩu?

3. Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau sao cho:

a) Luôn có mặt chữ số 6 và chữ số hàng trăm là số 4.

b) Là số chia hết cho 5 và một trong hai chữ số đầu tiên là chữ số 3.

4. Dùng 10 chữ số từ 0 đến 9 để lập ra số điện thoại 7 chữ số.

a) Có thể lập được bao nhiêu số điện thoại khác nhau?

b) Có bao nhiêu số điện thoại là số lẻ và đầu 8?

c) Có bao nhiêu số điện thoại đầu 8, là số lẻ và 5 chữ số ở giữa là một số đối xứng?

5. Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập ra được bao nhiêu số n thoả mãn $100 \leq n \leq 999$ sao cho n gồm:

a) 3 chữ số khác nhau.

b) 3 chữ số đều lẻ.

c) n là số lẻ và 3 chữ số khác nhau.

II. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP, TỔ HỢP, NHỊ THỨC NIUTƠN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Hoán vị

a) Hoán vị là gì?

- Cho tập hợp A có n phần tử. Một hoán vị của n phần tử này (gọi tắt là một hoán vị của A) là một cách sắp xếp n phần tử đó theo một thứ tự vào n vị trí khác nhau.
- Hai hoán vị được gọi là khác nhau nếu chúng có ít nhất một vị trí nào đó khác nhau

b) Số các hoán vị

Ta coi việc sắp xếp có thứ tự n phần tử vào n vị trí khác nhau là một công việc gồm n công đoạn: công đoạn 1 là chọn một phần tử trong n phần tử để xếp vào vị trí đầu tiên nên có n cách, công đoạn 2 là chọn một phần tử trong (n – 1) phần tử còn lại để xếp vào vị trí thứ 2 nên có (n – 1) cách,...., công đoạn thứ n là chọn phần tử còn lại cuối cùng để xếp vào vị trí thứ n nên có 1 cách. Do đó theo quy tắc nhân, nếu ký hiệu số các hoán vị của n phần tử là P_n thì:

$$P_n = n(n-1).....3.2.1 = n! \text{ (đọc là n giai thừa)}$$

tức là tập hợp A có n phần tử thì sẽ có n! hoán vị của A.

2. Chỉnh hợp

a) Chỉnh hợp chập k của n phần tử

Cho tập A có n phần tử. Một cách sắp xếp có thứ tự k phần tử khác nhau của A ($1 \le k \le n$) được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử.

b) Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử

Từ định nghĩa ta thấy vị trí đầu tiên của chỉnh hợp chập k có n cách lấy, vị trí thứ hai có (n – 1) cách lấy,..., vị trí thứ k có (n – k + 1) cách lấy.

Do đó, theo quy tắc nhân, nếu ký hiệu số chỉnh hợp chập k từ n phần tử là A_n^k thì :

$$A_n^k = n(n-1)....(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ với quy ước } 0! = 1$$

Rõ ràng chỉnh hợp chập n từ n phần tử là một hoán vị của tập hợp đó, vì vậy $A_n^n = n!$

3. Tổ hợp

a) Tổ hợp chập k của n phần tử ($k \le n$)

Tổ hợp chập k của n phần tử là một nhóm gồm k phần tử ($k \le n$) không phân biệt thứ tự được lấy ra đồng thời (cùng một lúc) từ tập đã cho. Nói khác đi, tổ hợp chập k của n phần tử là một tập con k phần tử.

Rõ ràng là hai tổ hợp khác nhau nếu giữa chúng có ít nhất một phần tử khác nhau.

b) Số tổ hợp chập k của n phần tử

- Ta thấy mỗi cách sắp xếp có thứ tự của mỗi tổ hợp chập k cho ta một chỉnh hợp chập k. Do đó khi hoán vị mỗi tổ hợp này ta được k! chỉnh hợp chập k. Vì vậy nếu kí hiệu số tổ hợp chập k của n phần tử là C_n^k thì k! $C_n^k = A_n^k$ hay

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ với quy ước } 0! = 1$$

- Dễ dàng chứng minh được các tính chất cơ bản về tổ hợp:

(i) $C_n^k = C_n^{n-k}$ với mọi k: $0 \le k \le n$; $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$;

(ii) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

4. Khai triển Nhị thức Niutơn và tam giác Paxcan

a) Khai triển nhị thức Niutơn

Công thức khai triển nhị thức Niutơn tổng quát là:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + ... + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n \quad \forall n = 1, 2, ...$$

Viết gọn lại: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ (do vai trò của a và b như nhau và do tính chất (i) của tổ hợp).

Ta suy ra:

(i) Nếu a + b =1 thì $\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k (1-a)^{n-k} = 1$

(ii) Nếu a = b =1 thì $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

(iii) Nếu a = 1, b = – 1 thì $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$

Ta có một số khai triển quan trọng (dùng để tính tổng các tích liên quan đến các hệ số của khai triển nhị thức Niutơn thường được đề cập trong các đề thi tốt nghiệp THPT và thi đại học):

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} \; ; \; (1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k x^{n-k} \; ;$$

b) Tam giác Paxcan

- Trong khai triển nhị thức Niutơn $(a+b)^n$ cần biết (n+1) hệ số $C_n^0, C_n^1, ..., C_n^{n-1}, C_n^n$. Các hệ số này tìm được từ tam giác Paxcan sau đây:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
....

- Việc lập tam giác này như sau:

Đỉnh ghi số 1, hàng thứ nhất (dưới đỉnh) ghi hai số 1. Nếu biết hàng thứ n ($n \geq 1$) thì hàng thứ ($n+1$) tiếp theo được lập bằng cách cộng hai số liên tiếp của hàng thứ n rồi viết kết quả vào hàng ($n+1$) ở vị trí giữa 2 số này, sau đó viết số 1 vào đầu và cuối hàng (tức vị trí hai đỉnh còn lại của tam giác).

Người ta dùng khai triển Nhị thức Niutơn và bảng tam giác Paxcan để tính hệ số của $x^r y^s$ trong khai triển $(ax + by)^n$, của x^r trong khai triển $(ax + b)^n$, của y^s trong khai triển $(a + by)^n$, v.v...

B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1: Có 3 phần tử A, B, C. Khi đó:

a) Có $P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$ hoán vị là ABC, ACB, BAC, BCA, CAB và CBA ($ABC \neq ACB$ vì ở vị trí thứ hai $B \neq C$)

b) Có $A_3^2 = \dfrac{3!}{(3-2)!} = \dfrac{3.2.1}{1} = 6$ chỉnh hợp chập 2 của 3 phần tử này là AB, BA, BC, CB, AC, CA (chú ý $AB \neq BA$)

c) Có $C_3^2 = \dfrac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ tổ hợp chập 2 của 3 phần tử này là: AB, BC, CA (chú ý $AB \neq AC$ còn $AB = BA$)

Ví dụ 2: Giả sử có 4 phần tử a, b, c, d. Có thể lập được bao nhiêu nhóm gồm 2 phần tử lấy ra từ các phần tử trên

Giải: Ta chia ra các trường hợp sau:

a) Nếu lấy ra có thứ tự không hoàn lại từng phần tử thì số nhóm lập được là số chỉnh hợp chập 2 của 4 phần tử:

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4.3.2.1}{2.1} = 12 \text{ nhóm.}$$

Đó là các nhóm ab – ba – ac – ca – bc – cb – ad – da – bd – db – cd – dc.

b) Nếu không để ý đến thứ tự và lấy ra cùng một lúc thì số nhóm là số tổ hợp chập 2 của 4 phần tử: $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!2!} = \dfrac{4.3.2.1}{2.2} = 6$ nhóm.

Đó là: ab – ad – ac – bc – bd – cd.

Ví dụ 3: Có 10 điểm nằm trên đường tròn.

a) Có thể kẻ được bao nhiêu đường thẳng?

b) Có thể vẽ được bao nhiêu véctơ?

c) Có thể vẽ được bao nhiêu tam giác?

d) Có thể vẽ được bao nhiêu tứ giác?

e) Có thể vẽ được bao nhiêu đa giác lồi?

Giải: a) Vì cứ 2 điểm vẽ được một đường thẳng nên số đường thẳng là số tổ hợp chập 2 của 10 điểm tức là $C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2!8!} = 45$ đường.

b) Vì véctơ là đường thẳng có hướng (như là một cặp điểm có thứ tự) nên số véctơ là số chỉnh hợp chập 2 của 10 tức là:

$$A_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{8!9.10}{8!} = 90 \text{ véctơ.}$$

c) Số tam giác là: $C_{10}^3 = \dfrac{10!}{3!7!} = \dfrac{7!8.9.10}{3.2.7!} = 120$ tam giác.

d) Số tứ giác là: $C_{10}^4 = \dfrac{10!}{4!6!} = \dfrac{6!7.8.9.10}{4.3.2.6!} = 210$ tứ giác.

e) Ta có số đa giác lồi k cạnh ($3 \leq k \leq 10$) là C_{10}^k. Do đó số đa giác lồi có thể vẽ được từ 10 điểm trên đường tròn là :

$$C_{10}^3 + C_{10}^4 + C_{10}^5 + ... + C_{10}^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_k^{10} - C_{10}^0 - C_{10}^1 - C_{10}^2. = 2^{10} - 1 - 10 - 45 = 968$$

tức là có 968 đa giác lồi.

Ví dụ 4: Trong một cuộc liên hoan bàn tròn có 12 người gồm 7 nam và 5 nữ.

a) Có bao nhiêu cách sắp xếp số người này để mỗi người một ghế?

b) Có bao nhiêu cách sắp xếp để 2 người A và B ngồi cạnh nhau trong bàn tròn đó?

c) Có bao nhiêu cách chọn ra 6 người gồm 4 nam và 2 nữ để lập một bàn mới?

Giải: a) Số cách xếp 12 người mà mỗi người ngồi vào một ghế chính là số hoán vị của 12 người này: $P_{12} = 12! = 479\ 001\ 600$ cách.

b) Ta thấy người A có 12 cách chọn ghế thì người B chỉ còn 2 cách chọn (vì bàn tròn nên B chỉ có thể ngồi ở bên trái hoặc bên phải người A) và 10 người còn lại được ngồi tuỳ ý vào 10 ghế tức là có 10! cách . Do đó theo quy tắc nhân, số cách sắp xếp để 2 người A và B ngồi cạnh nhau trong bàn tròn đó là:

$$12.2.10! = 87\ 091\ 200 \text{ cách.}$$

c) Vì 4 người nam phải chọn trong 7 nam nên có C_7^4 cách, tương tự có C_5^2 cách chọn ra 2 người nữ. Do đó theo quy tắc nhân, có: $C_7^4 . C_5^2 = \dfrac{7!}{4!3!} . \dfrac{5!}{2!3!} =$ 350 cách chọn ra 4 nam và 2 nữ để lập bàn mới.

Ví dụ 5: Một lớp học có 30 học sinh trong đó có 20 nam. Có bao nhiêu cách chọn ra một ban cán sự lớp gồm 1 lớp trưởng, 1 lớp phó về học tập, 1 lớp phó về văn thể, 1 lớp phó về đời sống, trong đó:

a) Chọn tuỳ ý; b) Lớp trưởng là nữ.

c) Có đúng 1 nam; d) Tất cả là nữ.

Giải: a) Nếu chọn tuỳ ý thì số cách chọn là số chỉnh hợp chập 4 của 30 học sinh, tức là có $A_{30}^4 = \dfrac{30!}{26!} = 657\ 720$ cách chọn ban cán sự lớp (không thể là số tổ hợp C_{30}^4 vì phải phân biệt lớp trưởng và các lớp phó).

b) Chọn ra lớp trưởng là nữ có C_{10}^1 cách chọn, còn 3 lớp phó khác nhau sẽ có A_{29}^3 cách chọn. Do đó theo quy tắc nhân có:

$C_{10}^1 . A_{29}^3 = 219\ 240$ cách chọn ra ban cán sự lớp với lớp trưởng là nữ.

c) Chọn ra 1 nam có 20 cách chọn, chọn ra 3 nữ có C_{10}^3 cách. Sau đó phải sắp xếp 1 nam và 3 nữ này vào 4 vị trí lớp trưởng và các lớp phó khác nhau tức là có 4! cách nữa. Do đó có: $20.C_{10}^3.4! = 57\ 600$ cách chọn ra ban cán sự lớp trong đó có đúng 1 nam.

d) Có $A_{10}^4 = 5040$ cách chọn ra ban cán sự lớp toàn là nữ.

Ví dụ 6: Có thể lập được bao nhiêu dãy 6 chữ số từ các chữ số 0, 1, 2,... 9 trong đó:

a) Mỗi dãy gồm các chữ số khác nhau.

b) Mỗi dãy là một số tự nhiên do 3 chữ số khác nhau tạo thành với một chữ số xuất hiện 3 lần, một chữ số xuất hiện 2 lần và chữ số còn lại xuất hiện 1 lần.

Giải: a) Số dãy số có 6 chữ số khác nhau lập được từ 10 chữ số từ 0 đến 9 là $A_{10}^6 = 10.\ 9.8.7.6.5 = 151\ 200$ dãy.

b) Nếu tính cả số 0 đứng đầu thì có 10 cách chọn chữ số xuất hiện 3 lần và có $C_6^3 = 20$ cách chọn 3 trong 6 vị trí cho chữ số này. Sau đó có 9 cách chọn chữ số xuất hiện 2 lần và có $C_3^2 = 3$ cách chọn 2 trong 3 vị trí còn lại cho chữ số này. Cuối cùng có 8 cách chọn cho chữ số xuất hiện 1 lần. Do đó theo quy tắc nhân ta được số dãy 6 chữ số do 3 chữ số khác nhau tạo thành với một chữ số xuất hiện 3 lần, một chữ số xuất hiện 2 lần và một chữ số xuất hiện 1 lần là:

$$S = 10.20.9.3.8 = 43\ 200 \text{ dãy.}$$

Vì vai trò của các chữ số 0, 1, 2,..., 9 đứng đầu dãy là như nhau nên sau khi loại bỏ các dãy có số 0 đứng đầu, ta được số các dãy là số tự nhiên thoả mãn yêu cầu là: $\dfrac{9S}{10} = 38\ 800$ dãy.

Ví dụ 7: Một tập A có n phần tử. Kí hiệu E(A) là tập hợp tất cả các tập con của A (kể cả tập rỗng ∅ và tập A). Chứng minh E(A) có 2^n phần tử.

Giải: Ta có số tập con có k phần tử là C_n^k ($0 \le k \le n$), trong đó tập rỗng ∅ ứng với k = 0 và tập A ứng với k = n

Vì vậy số tập con của A là $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$. Theo kết quả ở mục II.4.(ii) về Nhị thức Niu-tơn thì $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$, tức là tập A có 2^n tập con. Do đó tập E(A) có 2^n phần tử.

Ví dụ 8: Dùng công thức Nhị thức Niutơn để:

a) Khai triển $(x - 3)^6$ thành đa thức bậc 6.

b) Tìm hệ số của số hạng chứa x^{31} trong khai triển của $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}$.

c) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17}$.

Giải: a) Ta có $(x-3)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k (-3)^{6-k} x^k = \sum_{k=0}^{6} a_k x^k$ với $a_k = (-3)^6 C_6^k$.

Dùng công thức tổ hợp ta tính được :

$a_0 = 729;\ a_1 = -1358;\ a_2 = 1215;\ a_3 = -540;\ a_4 = 135;\ a_5 = -18;\ a_6 = 1$

Do đó: $(x-3)^6 = 729 - 1358x + 1215x^2 - 540x^3 + 135x^4 - 18x^5 + x^6$

b) Ta có: $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40} = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k x^{40-k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k x^{40-3k}$

Số hạng chứa x^{31} tương ứng với k sao cho $x^{40-3k} = x^{31}$ tức là: $40 - 3k = 31$ hay $k = 3$.

Do đó hệ số của x^{31} là $C_{40}^3 = 9880$

c) Ta có: $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17} = \sum_{k=0}^{17} C_{17}^k x^{-\frac{2}{3}(17-k)} .x^{\frac{3k}{4}} = \sum_{k=0}^{17} C_{17}^k .x^{\frac{17k}{12} - \frac{34}{3}}$

Số hạng không chứa x tương ứng với k sao cho $\frac{17k}{12} - \frac{34}{3} = 0$

Ta suy ra k = 8. Vậy số hạng không chứa x là $C_{17}^8 = 24.310$

Ví dụ 9: Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển của $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$ biết rằng $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$.

Giải : Sử dụng công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$ ta có :

$C_{2n+1}^1 = C_{2n+1}^{2n};\ C_{2n+1}^2 = C_{2n+1}^{2n-1}; ... , C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1}$

Vì vậy, $2(2^{20} - 1) = C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^{2n} + ... + C_{2n+1}^n + C_{2n+1}^{n+1} + ... + C_{2n+1}^{2n}$

$= \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k - 2 = 2^{2n+1} - 2$. Do đó $2^{21} = 2^{2n+1}$ và suy ra n = 10.

Ta có: $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^{10} = \sum_{k=1}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{x^4}\right)^{10-k} .x^{7k} = \sum_{k=1}^{10} C_{10}^k .x^{11k-40}$

Số hạng chứa x^{26} ứng với $11k - 40 = 26$ nên k = 6.

Từ đây suy ra hệ số của x^{26} là $C_{10}^6 = 210$.

C. ĐỀ BÀI TẬP

6. Từ các chữ số 0, 1, 2,...,9 lập ra các số gồm 6 chữ số khác nhau từng đôi một. Hỏi trong số đó :

a) Có bao nhiêu số là số chẵn mà chữ số đầu tiên là số lẻ ?

b) Có bao nhiêu số chứa đúng 3 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn ?

7. Sắp xếp chỗ ngồi cho 5 học sinh lớp A và 5 học sinh lớp B vào 2 dãy ghế đối diện nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp để bất kỳ 2 học sinh vào ngồi đối diện nhau thì khác lớp nhau?

8. Một đội văn nghệ của khối 11 gồm 5 học sinh lớp A, 6 học sinh lớp B và 7 học sinh lớp C. Chọn ra một nhóm 4 thành viên của đội để đi biểu diễn ở trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để :

a) Phải có đủ học sinh của 3 lớp.

b) Có đủ học sinh của 3 lớp trong đó có nhiều nhất 1 học sinh của lớp A.

9. Một hộp đựng 4 bi đỏ, 5 bi trắng và 6 bi xanh. Chọn ra 4 bi từ hộp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong số bi lấy ra không có đủ 3 màu?

10. Một tổ học tập gồm 6 nam và 4 nữ. Hỏi :

a) Có bao nhiêu cách chọn ra 5 học sinh để trong đó có nhiều nhất 1 học sinh nữ?

b) Có bao nhiêu cách chia tổ thành 2 nhóm để mỗi nhóm có 3 nam, 2 nữ?

11.Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số:

a) Có 5 chữ số khác nhau.

b) Là số trăm (nhỏ hơn 1000 và lớn hơn 99) mà mỗi chữ số của nó chỉ có mặt một lần.

c) Là số nghìn (nhỏ hơn 10000 và lớn hơn 999).

12. Trong một buổi dạ hội có 15 học sinh nữ và 12 học sinh nam. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra:

a) Hai người ra hát song ca.

b) Một đôi học sinh nam nữ hát song ca .

13. Cần phải xếp 9 cuốn sách (5 sách màu đỏ khác nhau và 4 sách màu xanh khác nhau) vào 9 vị trí. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp :

a) Tuỳ ý

b) Sách đỏ liền nhau, sách xanh tuỳ ý

c) Một bên sách đỏ, một bên sách xanh

d) Sách xanh đỏ xen kẽ nhau.

14. Trong lớp 40 học sinh có 4 bạn Thu, Hà, Hương, Dung. Chia lớp thành 10 nhóm, mỗi nhóm 4 người để thực hành môn học. Hỏi có bao nhiêu cách chia để:

a) Thu cùng nhóm với Hà,

b) Thu cùng nhóm với Hà hoặc Hương,

c) Thu, Hà, Hương, Dung cùng nhóm.

15. Một cuộc thi có 15 người tham gia với kết quả không có hai người nào có điểm bằng nhau. Hỏi:

a) Có bao nhiêu cách chọn ra 4 người có điểm cao nhất?

b) Có bao nhiêu cách chọn ra các giải nhất, nhì, ba?

16. Năm người cùng lên một đoàn tàu có 8 toa. Có bao nhiêu cách để:

a) Lên tuỳ ý;

b) Lên cùng một toa;

c) Lên 5 toa đầu.

d) Lên 5 toa khác nhau;

e) Hai người A và B lên cùng toa đầu.

f) A và B lên cùng một toa.

g) A và B lên cùng một toa và không có ai khác lên toa này.

17. Một cỗ bài tú lơ khơ có 52 con gồm 2 màu đỏ đen và 4 loại pích - chuồn - cơ - rô được đánh số từ 2, 3, 4,.... 9, 10, J, Q, K, ÁT.

a) Có mấy cách rút ra 6 con bài sao cho trong đó có 3 con pích, 2 con cơ và một con rô?

b) Có mấy cách rút ra 5 con bài sao cho có 2 con màu đỏ và 3 con màu đen?

18. Có 100 vé phát cho 100 người để quay trúng thưởng với 4 giải : nhất - nhì - ba - tư . Hỏi:

a) Có bao nhiêu cách chọn ra những người trúng giải?

b) Nếu biết người có vé số 45 trúng giải nhất thì có bao nhiêu cách chọn ra những người trúng giải thưởng?

c) Nếu biết người có vé số 45 trúng một trong 4 giải thì có bao nhiêu cách chọn ra những người được giải thưởng?

19. Tìm hệ số của $x^{25}.y^{10}$ trong khai triển $(x^3 + xy)^{15}$

20. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left[\sqrt[4]{2x}+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right]^9$?

21. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(3x^2+\frac{2}{x}\right)^n$, biết rằng $C_n^0+C_n^1+C_n^2=121$.

22. Xác định hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^n$ biết rằng tổng các hệ số của 3 số hạng đầu tiên trong khai triển đó bằng 97?

23. Biết tổng tất cả các hệ số của khai triển nhị thức $(x^2+1)^n$ là 2048. Hãy tìm hệ số của x^{14} trong khai triển đó ?

24. Tìm các số hạng của khai triển $(\sqrt[3]{4}+\sqrt{5})^9$ là số nguyên ?

III. PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ BIẾN CỐ

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

I. Phép thử ngẫu nhiên

a) Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử và kí hiệu bởi chữ T) là một thí nghiệm, một công việc, một quan sát, một trắc nghiệm khách quan, một cuộc điều tra,v.v..., mà nó có thể lặp đi lặp lại nhiều lần trong các điều kiện giống nhau và khi thực hiện thì không dự đoán được kết quả nào của nó sẽ xảy ra.

Ví dụ đơn giản nhất về phép thử là gieo một đồng xu trên mặt phẳng (để tìm may rủi, để chọn sân hay chọn bóng trong một trận đấu,...) và khi gieo không đoán trước được mặt sấp (S) hay mặt ngửa (N) sẽ xuất hiện.

b) *Tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử* được gọi là không gian mẫu của phép thử và kí hiệu là Ω (ômêga). Để xác định được không gian mẫu (số lượng các kết quả của phép thử, tính chất của các kết quả đó,...) cần phải chỉ rõ cấu trúc, nội dung của phép thử (các điều kiện hình thành nên phép thử). Chẳng hạn phép thử là gieo một đồng xu thì phải có hành động "gieo" trên một mặt phẳng và đồng xu có 2 mặt sấp và ngửa,v.v...

2. Biến cố liên quan đến phép thử

a) Giả sử có phép thử T với không gian mẫu Ω. Một tập con A nào đó của Ω được gọi là một biến cố liên quan đến phép thử T. Số phần tử của A được gọi là số kết quả thuận lợi (số trường hợp thuận lợi) cho A và kí hiệu là $|A|$.

b) Một biến cố được gọi là biến cố chắc chắn nếu nó chắc chắn xảy ra khi thực hiện phép thử và cũng được kí hiệu bởi Ω (vì số trường hợp thuận lợi cho nó là toàn bộ không gian mẫu Ω).

- Biến cố được gọi là không thể, kí hiệu là $\varnothing$ (giống kí hiệu tập rỗng) nếu nó không thể xảy ra khi thực hiện phép thử.
- Biến cố được gọi là biến cố ngẫu nhiên, kí hiệu bởi A, B, C,... nếu nó có thể xảy ra hoặc không xảy ra khi thực hiện phép thử.
- Người ta thường dùng kí hiệu "....", $\{...\}$ để trong đó ghi nội dung biến cố.

c) Các phép toán về biến cố.

(i) Phép kéo theo: Biến cố A được gọi là kéo theo biến cố B, kí hiệu là $A \subseteq B$, khi và chỉ khi ($\Leftrightarrow$) A xảy ra thì B xảy ra.

Dễ dàng nhận thấy $A \subseteq \Omega$ và $\varnothing \subseteq A\ \forall A$.

(ii) Phép tương đương (hay bằng nhau). Hai biến cố A và B được gọi là tương đương (hay bằng nhau), viết là A = B khi và chỉ khi $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$.

(iii) Hợp của A và B, kí hiệu là $A \cup B$, là biến cố xảy ra $\Leftrightarrow$ hoặc A xảy ra, hoặc B xảy ra, tức là có ít nhất A hoặc B xảy ra.

Ta có : $A \cup \Omega = \Omega$ và $A \cup \varnothing = A$ với mọi A; $B \subseteq A$ thì $A \cup B = A$.

(iv) Giao (hay tích) của A và B, kí hiệu là $A \cap B$ hay AB là biến cố xảy ra $\Leftrightarrow$ A và B cùng xảy ra.

Ta có $A \cap \Omega = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing\ \forall A$; $B \subseteq A$ thì $A \cap B = B$.

(v) Hiệu của A và B, kí hiệu là $A \setminus B$, là biến cố xảy ra $\Leftrightarrow$ A xảy ra còn B không xảy ra.

(vi) Với mỗi biến cố A luôn có một biến cố gọi là biến cố đối của A, kí hiệu là $\overline{A}$, là biến cố xảy ra $\Leftrightarrow$ A không xảy ra và ngược lại.

Ta có $\overline{A} = \Omega \setminus A$, $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A\overline{A} = \varnothing$, $\overline{\Omega} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = \Omega$, $\overline{\overline{A}} = A$, $A \setminus B = A\overline{B}$

(vii) Các phép toán hợp và giao có thể mở rộng ra cho nhiều biến cố, đồng thời chúng có các tính chất giao hoán, kết hợp và phân phối. Đặc biệt có quy tắc De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

(viii) Nếu $AB = \varnothing$ thì ta nói A và B xung khắc với nhau.

Rõ ràng hai biến cố đối nhau thì xung khắc nhau. Khi đó $A \cup B$ được viết là A + B.

B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1: a) Gieo một đồng xu trên mặt phẳng là một phép thử ngẫu nhiên. Khi gieo có các kết quả là mặt sấp (S) hoặc mặt ngửa (N) xảy ra. Không gian mẫu của phép thử này là $\Omega = \{S, N\}$.

b) Gieo một con xúc xắc là một phép thử. Khi gieo sẽ xuất hiện một trong các mặt i chấm, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6. Gọi A_i là kết quả "xuất hiện mặt i chấm" thì không gian mẫu $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$. Biến cố chắc chắn Ω là biến cố "xuất hiện mặt i chấm, $0 < i < 7$", biến cố $\varnothing$ là biến cố "xuất hiện mặt 7 chấm".

A là biến cố xuất hiện mặt chẵn chấm thì $A = \{A_2, A_4, A_6\}$,

B là biến cố xuất hiện mặt lẻ chấm thì $B = \{A_1, A_3, A_5\}$

C là biến cố xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 3 thì $C = \{A_3, A_6\}$

Số kết quả thuận lợi cho A và cho B đều là 3, còn cho C là 2.

Chú ý là đôi khi người ta có thể gọi kết quả của phép thử này là "số chấm xuất hiện ở mặt trên con xúc xắc" thì không gian mẫu $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

c) Gieo cùng một lúc 2 đồng xu cũng là một phép thử. Không gian mẫu $\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}$ trong đó SS là kết quả cả 2 đồng xu cùng xuất hiện mặt S; SN là kết quả đồng xu thứ nhất xuất hiện mặt S, còn đồng xu thứ hai xuất hiện mặt N, vv….

Ví dụ 2: Từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con, lấy ngẫu nhiên ra 4 con bài. A là biến cố rút ra 4 con bài trong đó có một con át. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử và số trường hợp thuận lợi cho A?

Giải: Phép thử là rút ra 4 con bài trong 52 con nên không gian mẫu có $C_{52}^4 =$ 270.725 kết quả mà mỗi kết quả là nhóm 4 con bài bất kỳ. Biến cố A là rút ra 4 con bài trong đó có 1 con át tức là rút ra một con át trong 4 con át với C_4^1 cách và rút ra 3 con khác trong 48 con còn lại với C_{48}^3 cách nên số kết quả thuận lợi cho A là $C_4^1 . C_{48}^3 =$ 17.296 (mỗi kết quả thuận lợi này là 1 nhóm 4 con bài trong đó có 1 con át và 3 con bài khác)

Ví dụ 3: Trong một lớp có học sinh giỏi Toán, có học sinh giỏi Văn, có học sinh giỏi cả Văn và Toán. Gọi A, B lần lượt là các biến cố chọn trong lớp ra được học sinh giỏi Toán, giỏi Văn. Khi đó:

- $A \cup B$ là biến cố chọn ra được học sinh hoặc giỏi Toán, hoặc giỏi Văn, hoặc giỏi cả Văn và Toán.
- $A \cap B$ là biến cố chọn ra được học sinh giỏi cả Toán và Văn.
- $A \setminus B$ là biến cố chọn ra được học sinh chỉ giỏi Toán mà không giỏi Văn.
- $\overline{A}$ là biến cố chọn được học sinh không giỏi Toán.

Nếu lớp có 45 học sinh trong đó có 15 học sinh giỏi Toán, 10 học sinh giỏi Văn, 5 học sinh giỏi cả Toán và Văn thì số trường hợp thuận lợi cho A, ký hiệu là $|A|$ là : $|A| = 15$. Tương tự ta có:

$|B| = 10$; $|AB| = 5$; $|A \setminus B| = 10$; $|\overline{A}| = 30$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |AB| = 15 + 10 - 5 = 20$; v.v....

Ví dụ 4: Ba học sinh thi thực hành môn Tin học. Gọi A_k là biến cố học sinh thứ k thi đạt (k = 1, 2, 3). Ta có thể mô tả các biến cố A, B, C, D dưới đây theo các A_k như sau:

a) A = "Cả 3 học sinh đều thi đạt" = $A_1A_2A_3$

b) B = "Có ít nhất một người thi đạt" = $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

c) C = "Có 2 trong 3 người thi đạt" = $\overline{A_1}A_2A_3 \cup A_1\overline{A_2}A_3 \cup A_1A_2\overline{A_3}$

d) D = "Có ít nhất 1 người thi không đạt" = $\overline{A_1A_2A_3} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$

Rõ ràng $A \subseteq B$; $C \subseteq B$; $\overline{A} = D$

C . ĐỀ BÀI TẬP

25. Gieo đồng thời hai con xúc xắc. A là biến cố tổng số chấm xuất hiện ở mặt trên của 2 con xúc xắc là số chẵn, B là biến cố có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm, C là biến cố có đúng một con xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử này và liệt kê các kết quả thuận lợi của các biến cố A, B, C.

26. Ba học sinh thi môn Anh văn. Gọi A_k (k = 1, 2, 3) là biến cố học sinh thứ k thi đạt. Hãy biểu diễn qua A_k các biến cố sau đây:

a) A = "Chỉ có học sinh thứ nhất thi đạt".

b) B = "Học sinh đầu thi đạt còn học sinh thứ hai thi trượt".

c) C = "Có ít nhất một học sinh thi đạt".

d) D = "Có ít nhất hai học sinh thi đạt".

27. Có 30 đề thi trong đó có 10 đề khó và 20 đề trung bình. A là biến cố một học sinh bốc ra 2 đề được ít nhất 1 đề trung bình. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử và chỉ ra số trường hợp thuận lợi cho A.

28. Có 2 nhóm học sinh, mỗi nhóm 12 người. Nhóm I có 8 nam và 4 nữ, nhóm II có 7 nam và 5 nữ. Từ mỗi nhóm chọn ra 1 học sinh để phỏng vấn. Gọi A là biến cố cả 2 học sinh chọn ra đều là nam, B là biến cố chọn ra cả 2 người cùng giới. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử và chỉ ra số trường hợp thuận lợi cho A và B.

IV . XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Định nghĩa cổ điển của xác suất

a) *Định nghĩa*:

Giả sử phép thử T có không gian mẫu gồm n kết quả đồng khả năng xuất hiện (cùng khả năng xuất hiện). A là biến cố bất kỳ liên quan đến T (tức A là một tập con của không gian mẫu của T) có m kết quả thuận lợi. Khi đó người ta gọi xác suất của biến cố A, ký hiệu là P(A) là một số không âm ($P(A) \geq 0$) đo khả năng xuất hiện (khả năng xảy ra) của biến cố A và được xác định bởi công thức :

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{Số kết quả thuận lợi cho A}}{\text{Số tất cả kết quả có thể có của T}}$$

Định nghĩa này được gọi là định nghĩa cổ điển của xác suất và thường xuyên được dùng để tính xác suất của biến cố. Với định nghĩa này đối với hai biến cố thì biến cố nào có xác suất lớn hơn sẽ có khả năng xảy ra nhiều hơn (tức dễ xảy ra hơn).

b) Để tính được xác suất của biến cố cần phải biết rõ cấu trúc của phép thử T mà biến cố A có liên quan để xác định được n là số kết quả có thể có của không gian mẫu của T và m là số các kết quả thuận lợi của A. Trong thực tế để phép thử T có các kết quả đồng khả năng (cùng khả năng) thì các điều kiện hình thành phép thử cần có tính đối xứng (như đồng xu hay con xúc xắc phải cân đối, đồng chất; việc chọn ra phần tử phải "chọn ngẫu nhiên", "chọn hú hoạ", v.v...)

c) Dễ dàng thấy rằng : $0 \leq P(A) \leq 1$ với mọi A (vì $m \leq n$).

Tính chất này cho thấy xác suất đo khả năng xảy ra của biến cố có thể quy ra giá trị % (từ 0 % đến 100%) như thường nói về 'khả năng'. Đồng thời $P(\varnothing) = 0$ (vì m = 0); $P(\Omega) = 1$ (vì m = n) và nếu $A \subseteq B$ thì $P(A) \leq P(B)$.

2. Định nghĩa thống kê của xác suất

Có nhiều biến cố mà việc tính xác suất của chúng không đảm bảo các yêu cầu của định nghĩa cổ điển. Khi đó người ta dùng cách tính sau đây:

a) Tiến hành lặp lại n lần phép thử T và thống kê thấy A xuất hiện m lần. Khi n càng lớn thì tỉ số $\frac{m}{n}$ (gọi là tần suất của A) càng gần với một số cố định p nào đó. Ta gọi p là xác suất của biến cố A tức p = P(A).

Định nghĩa này được gọi là định nghĩa thống kê của xác suất.

b) Trong hầu hết các lĩnh vực của khoa học và đời sống xã hội, khi số lần thực hiện phép thử là n đủ lớn, thường lấy $P(A) \approx \frac{m}{n}$ với m là số lần xuất hiện A. Đặc biệt có thể lấy trung bình cộng của một số giá trị tần suất ở các thời điểm khác nhau làm giá trị gần đúng cho xác suất để đạt độ chính xác tốt hơn.

3. Công thức cộng xác suất

- Đối với hai biến cố bất kỳ A và B liên quan đến phép thử T có các kết quả đồng khả năng, ta luôn có:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \qquad (1)$$

Công thức này được gọi là công thức cộng xác suất.

Đối với 3 biến cố A, B, C thì công thức cộng có dạng:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \qquad (2)$$

- Từ (1) dễ dàng suy ra rằng nếu A và B là hai biến cố xung khắc tức

$$AB = \varnothing \text{ thì : } P(A + B) = P(A) + P(B) \qquad (3)$$

Từ (3) suy ra: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ (4)

với $\overline{A}$ là biến cố đối của A.

Công thức (4) giúp ta có thể tính xác suất của A thông qua xác suất của $\overline{A}$ và ngược lại. Điều này đặc biệt tiện lợi trong trường hợp A có dạng "ít nhất một..." thì $\overline{A}$ sẽ là "không có gì...".

- Mở rộng (3) cho trường hợp nhiều biến cố như sau:

Nếu k là biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ xung khắc nhau từng đôi một (tức $A_iA_j = \varnothing$, $i \neq j$) thì:

$$P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) \qquad (5)$$

4. Công thức nhân xác suất

a) Biến cố độc lập

Hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau nếu A xảy ra không phụ thuộc và không ảnh hưởng đến khả năng xảy ra biến cố B và ngược lại. Rõ ràng nếu A và B độc lập với nhau thì các biến cố trong mỗi cặp (A, $\overline{B}$), ($\overline{A}$, B), ($\overline{A}$,$\overline{B}$) cũng độc lập với nhau.

b) Công thức nhân xác suất

Hai biến cố A và B độc lập với nhau khi và chỉ khi $P(AB) = P(A)\,P(B)$ (6)

Công thức (6) được gọi là công thức nhân xác suất (đối với hai biến cố độc lập).

- Mở rộng : Các biến cố $A_1, A_2,...,A_k$ độc lập với nhau khi và chỉ khi

$$P(A_1A_2...A_k) = P(A_1).P(A_2)...P(A_k) \qquad (7)$$

- Trong thực tế các biến cố liên quan đến các phép thử có dạng sau đây được coi là các biến cố độc lập (nếu không nói gì thêm):

– Mỗi biến cố là chọn ra ngẫu nhiên một nhóm k phần tử của một tập hợp (k =1, 2, 3,....);

– Mỗi biến cố là chọn ngẫu nhiên, chọn hú hoạ các phần tử từ các tập không giao nhau.

– Các biến cố liên quan đến các phép thử được thực hiện lặp lại trong các điều kiện như nhau, chẳng hạn phép thử là bắn vào bia từng viên đạn một hay phỏng vấn từng thành viên học sinh trong một lớp về hiểu biết HIV - AIDS ,v.v..., thì các kết quả thu được là độc lập nhau.

B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1: a) Xét phép thử T là gieo một đồng xu cân đối, đồng chất với 2 kết quả có thể là mặt sấp (S) và mặt ngửa (N) xuất hiện. A là biến cố xuất hiện mặt sấp thì A có 1 kết quả thuận lợi là S.

Khi đó theo định nghĩa $P(A) = P(S)=\dfrac{1}{2}$. Tương tự $P(N) = \dfrac{1}{2}$.

b) Phép thử gieo một con xúc xắc có số kết quả có thể có là 6 gồm các A_i = "xuất hiện mặt i chấm" $i =\overline{1,6}$, nên xác suất xuất hiện mặt i chấm là $P(A_i) = \dfrac{1}{6}$

$i = 1, 2,...,6$ vì A_i có 1 kết quả thuận lợi.

Nếu A là biến cố xuất hiện mặt chẵn thì A có 3 kết quả thuận lợi là $\{A_2, A_4, A_6\}$. Do đó $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$;

Tương tự nếu B là biến cố xuất hiện mặt lẻ thì $P(B) = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 2: a) Một lớp 45 học sinh có 15 học sinh đạt khá giỏi. A là biến cố chọn hú hoạ ra được một học sinh khá giỏi thì vì phép thử là chọn ngẫu nhiên ra 1 học sinh nên số kết quả có thể có là 45 (có 45 cách chọn) và có 15 kết quả thuận lợi cho A (vì có 15 cách chọn), do đó ta có:

$P(A) = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$. Đây chính là tỉ lệ học sinh khá giỏi trong lớp.

b) Một hộp có 80 sản phẩm trong đó có 10 sản phẩm xấu, còn lại là sản phẩm tốt. Biến cố A là chọn ngẫu nhiên ra được 1 sản phẩm xấu trong 80 sản phẩm nên số kết quả có thể có là 80 và số kết quả thuận lợi cho A là 10. Do đó $P(A) = \dfrac{10}{80} = \dfrac{1}{8}$.

Đây cũng là tỷ lệ sản phẩm xấu trong hộp.

Từ ví dụ này ta thấy ở một khía cạnh nào đó xác suất đo khả năng xuất hiện của biến cố cũng chính là tỉ lệ của biến cố đó trong toàn bộ các kết quả của phép thử.

Ví dụ 3: Có 30 đề thi trong đó có 10 đề khó và 20 đề trung bình. Tìm xác suất để một học sinh bốc ra đồng thời 2 đề được ít nhất 1 đề trung bình .

Giải:

Phép thử ở đây là bốc ra đồng thời 2 đề trong 30 đề nên số kết quả có thể có là $C_{30}^2 = 435$. A là biến cố bốc ra đồng thời 2 đề được ít nhất 1 đề trung bình tức là trong 2 đề đó hoặc có 1 đề khó và 1 đề trung bình (biến cố B) hoặc cả 2 đề đều là trung bình (biến cố C). Do đó A = B + C với B và C xung khắc nhau. Theo công thức cộng xác suất thì $P(A) = P(B) + P(C)$

Ta có số kết quả thuận lợi cho B là $C_{10}^1 . C_{20}^1 = 10.20 = 200$; số kết quả thuận lợi cho C là $C_{20}^2 = 190$. Vì vậy:

$P(A) = P(B) + P(C) = \frac{200}{435} + \frac{190}{435} = \frac{390}{435} = \frac{78}{87}$

Ta cũng có thể tính P(A) thông qua P($\overline{A}$) như sau:

Ta có A là biến cố bốc ra 2 đề có ít nhất 1 đề trung bình nên $\overline{A}$ là biến cố bốc ra 2 đề không có đề nào là đề trung bình tức cả 2 đề đều khó. Khi đó số trường hợp thuận lợi cho $\overline{A}$ là $C_{20}^{2} = 45$.

Do đó $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{45}{435} = \frac{390}{435} = \frac{78}{87}$

Ví dụ 4: Khối 11 có hai lớp 11^A và 11^B (để đơn giản ta gọi lớp 1 và lớp 2). Mỗi lớp có 45 học sinh trong đó lớp I có 25 học sinh giỏi Toán, 30 học sinh giỏi Văn và 20 học sinh giỏi cả Văn và Toán, lớp II có 25 học sinh giỏi Toán, 30 học sinh giỏi Văn và 15 học sinh giỏi cả Văn và Toán. Hỏi nên tiếp xúc với lớp nào để khả năng gặp được một học sinh giỏi ít nhất 1 trong 2 môn Văn và Toán là cao hơn?

Giải: Gọi A_i là biến cố gặp được học sinh giỏi Toán ở lớp i; B_i là biến cố gặp được học sinh giỏi Văn ở lớp i; C_i là biến cố gặp được một học sinh giỏi ít nhất một trong 2 môn Văn và Toán ở lớp i. Rõ ràng: $C_i = A_i \cup B_i$, i = 1, 2

Theo công thức cộng xác suất thì:

$$P(C_i) = P(A_i) + P(B_i) - P(A_iB_i) \quad i = 1, 2$$

Đối với mỗi lớp, phép thử ở đây là gặp được 1 học sinh nên số kết quả có thể có là 45; số thuận lợi cho A_i là 25; cho B_i là 30(i = 1, 2), cho A_1B_1 là 20 và cho A_2B_2 là 15.

Do đó: $P(C_1) = P(A_1) + P(B_1) - P(A_1B_1) = \frac{25}{45} + \frac{30}{45} - \frac{20}{45} = \frac{7}{9}$

$$P(C_2) = P(A_2) + P(B_2) - P(A_2B_2) = \frac{25}{45} + \frac{30}{45} - \frac{15}{45} = \frac{8}{9}$$

Ta có $P(C_2) > P(C_1)$ nên tiếp xúc với lớp II tức lớp 11^B sẽ có khả năng gặp được học sinh giỏi ít nhất một trong 2 môn Văn và Toán là cao hơn.

Ta cũng có thể giải bài toán này bằng cách gọi C_i như trên và từ đó $\overline{C_i}$ sẽ là biến cố gặp được một học sinh không giỏi cả Văn và Toán. Số thuận lợi cho $\overline{C_1}$ là 10 (= 45 – 20 giỏi cả Văn và Toán – 10 chỉ giỏi Văn – 5 chỉ giỏi Toán)

Số thuận lợi cho $\overline{C_2}$ là 5 (= 45 – 15 giỏi cả Văn và Toán – 15 chỉ giỏi Văn – 10 chỉ giỏi Toán). Do đó :

$$P(C_1) = 1 - P(\overline{C_1}) = 1 - \frac{10}{45} = \frac{7}{9} < P(C_2) = 1 - P(\overline{C_2}) = 1 - \frac{5}{45} = \frac{8}{9}$$

Ví dụ 5: Một chiếc máy có hai động cơ 1 và 2 hoạt động độc lập với nhau. Xác suất để các động cơ này hoạt động tốt tương ứng là 0,7 và 0,8 . Tính xác suất để:

a) Cả hai động cơ đều hoạt động tốt.

b) Có một động cơ hoạt động tốt.

c) Có ít nhất một động cơ hoạt động tốt.

Giải: Gọi A_i là biến cố động cơ thứ i hoạt động tốt (i = 1, 2). Khi đó ta có:

$P(A_1) = 0,7$ và $P(A_2) = 0,8$;

a) Gọi A là biến cố cả hai động cơ hoạt động tốt thì $A = A_1A_2$. Do các động cơ hoạt động độc lập nên các A_i độc lập với nhau và ta có:

$P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = 0,7.0,8 = 0,56.$

b) Gọi B là biến cố có một động cơ hoạt động tốt thì $B = A_1\overline{A_2} \cup \overline{A_1}A_2$ nên

$P(B) = P(A_1\overline{A_2} \cup \overline{A_1}A_2) = P(A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}A_2) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})\,P(A_2)$

$= 0,7.(1-0,8) + (1-0,7).0,8 = 0,36.$ (do A_1 và $\overline{A_2}$ độc lập, $\overline{A_1}$ và A_2 độc lập, $A_1\overline{A_2}$ và $\overline{A_1}A_2$ xung khắc nên áp dụng các công thức cộng và nhân).

c) Gọi C là biến cố có ít nhất một động cơ hoạt động tốt thì biến cố đối $\overline{C}$ của C là biến cố cả hai động cơ không hoạt động tốt tức là $\overline{C} = \overline{A_1}\ \overline{A_2}$. Do đó:

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}) = 1 - P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2})$

$= 1 - (1-0,7)(1-0,8) = 0, 94$ (do $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$ độc lập)

Nhận xét: Ta có thể coi $C = A_1 U A_2$. Khi đó

$P(C) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = 0,7 + 0,8 - 0,56 = 0,94.$

Ví dụ 6: Có 2 hộp đựng bi, hộp 1 chứa 3 bi trắng và 7 bi xanh, hộp 2 chứa 10 bi trắng và 6 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 1 bi. Tìm xác suất để 2 bi lấy ra cùng màu?

Giải: Gọi A là biến cố 2 bi lấy ra cùng màu.

T_i là biến cố viên bi lấy ra ở hộp i là trắng và X_i là biến cố viên bi lấy ra ở hộp i là xanh (i = 1, 2)

Rõ ràng $A = T_1T_2 + X_1X_2$ (mỗi viên bi chỉ 1 màu nên ở đây T_1T_2 và X_1X_2 là xung khắc). Việc lấy bi từ các hộp là độc lập nhau nên các T_i (tương tự các X_i) là các biến cố độc lập. Theo công thức cộng (trường hợp 2 biến cố xung khắc) và công thức nhân (2 biến cố độc lập) ta có:

$$P(A) = P(T_1T_2 + X_1X_2) = P(T_1T_2) + P(X_1X_2) = P(T_1).P(T_2) + P(X_1).P(X_2)$$

$$= \frac{3}{10}.\frac{10}{16} + \frac{7}{10}.\frac{6}{16} = \frac{36}{80} = \frac{9}{20}$$

Vậy xác suất để hai viên bi lấy ra cùng màu là $\frac{9}{20}$.

Ví dụ 7: Ba học sinh thi nói Tiếng Anh với xác suất đạt điểm giỏi của từng người tương ứng là 0,7; 0,8 và 0,9. Tính xác suất:

a) Có hai người thi đạt điểm giỏi.

b) Có ít nhất 1 người không đạt điểm giỏi.

Giải: Gọi A_i là biến cố học sinh thứ i thi đạt điểm giỏi (i = 1, 2, 3) và ta có

$P(A_1) = 0,7; P(A_2) = 0,8; P(A_3) = 0,9$

a) Nếu gọi A là biến cố có hai học sinh thi đạt điểm giỏi thì

$A = A_1\,A_2\,\overline{A_3} + A_1\,\overline{A_2}\,A_3 + \overline{A_1}\,A_2\,A_3$ (do các số hạng là xung khắc nhau)

Theo công thức cộng xác suất và do A_i, $\overline{A_i}$ độc lập ta có:

$$P(A) = P(A_1\,A_2\,\overline{A_3}) + P(A_1\,\overline{A_2}\,A_3) + P(\overline{A_1}\,A_2\,A_3)$$

$$= P(A_1).P(A_2).P(\overline{A_3}) + P(A_1).P(\overline{A_2}).P(A_3) + P(\overline{A_1}).P(A_2).P(A_3)$$

$$= 0,7.\ 0,8\ (1 - 0,9) + 0,7.\ (1 - 0,8).\ 0,9 + (1 - 0,7).\ 0,8.\ 0,9 = 0,398.$$

b) Nếu gọi B là biến cố có ít nhất một học sinh thi không đạt điểm giỏi thì $\overline{B}$ là biến cố không có ai không đạt điểm giỏi tức cả 3 học sinh đều đạt điểm giỏi hay $\overline{B} = A_1\,A_2\,A_3$. Ta có: $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(A_1\,A_2\,A_3) = 1 - P(A_1).P(A_2).P(A_3)$

$$= 1 - 0,7.\ 0,8.\ 0,9 = 0,496.$$

C. ĐỀ BÀI TẬP

29. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây :

a) Xác suất để từ 7 miếng bìa trên đó ghi các chữ N, N, G, G, H, I, Ê, sắp xếp ngẫu nhiên được từ NGHIÊNG là :

A) $\frac{4}{7}$; B) $\frac{4}{7!}$; C) $\frac{5}{7}$; D) $\frac{5}{7!}$

b) Xác suất để từ các số 0, 1, 2,...,9 lập ngẫu nhiên được một số có 2 chữ số chia hết cho 16 là :

A) $\frac{1}{16}$; B) $\frac{2}{16}$; C) $\frac{1}{15}$; D) $\frac{2}{15}$

c) Xác suất để từ các đoạn thẳng có độ dài 1, 3, 5, 7, 9 cm lập được một tam giác là

A) $\frac{1}{10}$; B) $\frac{2}{10}$; C) $\frac{3}{10}$; D) $\frac{4}{10}$

30. Cho A và B là hai biến cố có xác suất $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{3}$ và $P(AB) = \frac{1}{6}$. Hãy tính các xác suất $P(A \cup B)$ và $P(\overline{A} \cup \overline{B})$?

31. Từ tập các số từ 1 đến 40, chọn ngẫu nhiên ra 10 số . Tính xác suất để các số chọn ra :

a) Tất cả đều là số lẻ (biến cố A);

b) Có 5 số chia hết cho 4 (biến cố B).

32. Một nhóm học sinh có 7 nam và 5 nữ. Tìm xác suất để chọn ra cùng lúc 5 người trong đó có 3 nam và 2 nữ?

33. Trong hộp có 4 viên bi trắng và 6 viên bi đỏ kích cỡ như nhau. Lấy ngẫu nhiên có thứ tự ra 2 viên bi. Tính xác suất để trong đó:

a) Cả 2 viên bi lấy ra đều trắng;

b) Viên bi lấy ra sau có màu đỏ.

34. Khối lớp 11 có 80 học sinh chia thành 20 nhóm thực hành Tin học. Trong khối có 4 bạn tên Hoa, Lan, Nhài, Cúc. Tìm xác suất để:

a) Hoa cùng nhóm thực hành với Lan;

b) Hoa cùng nhóm thực hành với Lan hoặc Nhài;

c) Hoa, Lan, Nhài, Cúc là một nhóm thực hành.

35. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Gọi A là biến cố tổng số chấm xuất hiện ở mặt trên hai con xúc xắc là số lẻ, B là biến cố có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 2 chấm. Hãy tính các xác suất: P(A); P(B); P(AB); P($\overline{AB}$); P($A \cup B$)?

36. Một lớp học có 30 học sinh trong đó có 4 học sinh giỏi, 9 học sinh khá và 10 học sinh trung bình. Chọn ngẫu nhiên ra 3 người. Tính xác suất để:

a) Cả 3 học sinh đều là học sinh trung bình;

b) Có ít nhất một học sinh giỏi;

c) Có đúng một học sinh khá.

37. Một chiếc máy có 3 động cơ hoạt động độc lập với nhau. Xác suất để các động cơ hoạt động tốt là 0,7; 0,8 và 0,9 tương ứng. Hãy tính xác suất để:

a) Cả 3 động cơ đều chạy tốt;

b) Có ít nhất 1 động cơ chạy tốt;

c) Có 2 động cơ chạy không tốt.

38. Gieo đồng thời 2 con xúc xắc. Gọi A là biến cố số chấm trên mặt con xúc xắc thứ nhất chia hết cho số chấm trên mặt con xúc xắc thứ 2. B là biến cố tổng số chấm trên hai con xúc xắc là số chẵn. Hỏi:

a) A và B có độc lập với nhau không?

b) A và B có xung khắc nhau không?

c) Xác suất $P(A \cup B)$ là bao nhiêu?

39. Một học sinh chơi trò chơi điện tử với xác suất thắng một ván là 0,4. Hỏi học sinh này phải chơi ít nhất bao nhiêu ván để trong trò chơi đó xác suất thắng ít nhất 1 ván lớn hơn 0,95 ?

40. Một đề thi trắc nghiệm có 5 câu, mỗi câu có 4 phương án trả lời trong đó chỉ có một phương án đúng. Một học sinh không học bài nên làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên một phương án nào đó trả lời cho mỗi câu. Tính:

a) Xác suất để học sinh đó trả lời đúng được 3 câu?

b) Xác suất để học sinh đó trả lời đúng được ít nhất 1 câu?

V. PHÂN PHỐI XÁC SUẤT CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Định nghĩa biến ngẫu nhiên rời rạc

Đại lượng X được gọi là biến ngẫu nhiên rời rạc nếu nó nhận giá trị bằng số rời rạc nhau thuộc một tập gồm hữu hạn hoặc vô hạn đếm được giá trị khác nhau với xác suất tương ứng.

Sau đây ta chỉ xét trường hợp tập giá trị mà biến ngẫu nhiên rời rạc có thể nhận là một tập hữu hạn giá trị.

Ví dụ đơn giản nhất về biến ngẫu nhiên X rời rạc là X là số chấm xuất hiện khi gieo một con xúc xắc cân đối, đồng chất; ở đây tập các giá trị X có thể nhận là tập $\{1,2,3,4,5,6\}$ và xác suất để X nhận giá trị i đều là $\frac{1}{6}$ (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)

2. Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

- Giả sử X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $x_1, x_2, ..., x_n$ với các xác suất tương ứng $P(X = x_k) = p_k$ ($k = \overline{1,n}$). Người ta gọi bộ $(p_i)_{i=\overline{1,n}}$ là phân phối xác suất của X (chú ý là $\Sigma p_i = 1$).
- Để mô tả biến ngẫu nhiên rời rạc X có phân phối xác suất $(p_i)_{i=\overline{1,n}}$ người ta dùng một bảng gồm 2 dòng : dòng trên ghi các giá trị mà X nhận theo thứ tự từ nhỏ đến lớn, dòng dưới ghi các xác suất tương ứng như sau:

$X= x_i$	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$P(X= x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Bảng trên được gọi là bảng phân phối xác suất của X.

- Từ bảng này ta biết được X nhận giá trị nào với xác suất bao nhiêu, đồng thời biết được giá trị X nhận với xác suất lớn nhất (gọi giá trị đó là số có khả năng nhất) và có thể tính được các xác suất để X nhận các giá trị nào đó (khác x_i).

- Ví dụ về bảng phân phối của biến ngẫu nhiên rời rạc X là số chấm xuất hiện khi gieo xúc xắc là:

X = i	1	2	3	4	5	6
P(X= i)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3. Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên rời rạc

Giả sử biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất:

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Khi đó hàm phân phối xác suất của X, ký hiệu là F(x),được xác định: $F(x) = P(X < x) = \sum_{i:x_i<x} p_i$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

và có biểu thức:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le x_1 \\ p_1 & x_1 < x \le x_2 \\ p_1 + p_2 & x_2 < x \le x_3 \\ \ldots\ldots & \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} & x_{n-1} < x \le x_n \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 & x > x_n \end{cases}$$

Ta có hàm F(x) xác định với mọi $x \in \mathbb{R} = (-\infty;+\infty)$ nên biết được F(x) hoàn toàn biết được X. Hàm phân phối F(x) được dùng để tính xác suất X nhận giá trị trong một khoảng bất kỳ như sau:

$P(a \le X < b) = F(b) - F(a) \quad \forall\, a; b \in \mathbb{R}$;

$P(X \le a) = F(a) + P(X = a) \ \forall\, a \in \mathbb{R}$;

$P(X > a) = 1 - P(X \le a) = 1 - F(a) - P(X = a) \ \forall\, a \in \mathbb{R}$;

4. Kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên rời rạc

a) Kỳ vọng:

- Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất:

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Kỳ vọng của X, ký hiệu là EX, là một số được tính theo công thức:

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots\ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Kỳ vọng cho ta một ý niệm khá chính xác về giá trị trung bình mà biến ngẫu nhiên X có thể nhận để các giá trị khác của X nằm xung quanh nó.

Trong thực tế, khi xem xét một đại lượng nào đó người ta thường quan tâm trước tiên đến giá trị trung bình của nó (điểm trung bình, thu nhập trung bình,.....) và hai đại lượng có giá trị trung bình khác xa nhau có thể coi là hoàn toàn khác nhau.

b) Phương sai

- Giả sử X là biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất:

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Phương sai của X, ký hiệu là DX, là một số được tính theo công thức:

$$DX = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \ldots + x_n^2p_n - (x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots x_np_n)^2$$

$$DX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2$$

Ta thấy DX luôn luôn lớn hơn hoặc bằng 0. Nó cho ta biết mức độ phân tán hay tập trung của các giá trị của X xung quanh giá trị trung bình EX. Phương sai càng lớn các giá trị càng phân tán, phương sai càng bé các giá trị càng tập trung. Vì vậy, phương sai là một đặc trưng cho ta biết cần chọn biến ngẫu nhiên nào, hiện tượng nào phù hợp với mục đích yêu cầu đề ra.

- Giá trị $\sigma(x) = \sqrt{DX}$ được gọi là độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X. Nó cho ta biết độ lệch (sai số) giữa các giá trị của biến ngẫu nhiên và giá trị trung bình của nó (σ : đọc là xích ma).

5. Một vài biến ngẫu nhiên rời rạc thường dùng

a) Biến ngẫu nhiên rời rạc đều

Biến ngẫu nhiên X nhận các giá trị $x_1, x_2, \dots, x_n$ với xác suất $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$ (i = 1, 2,....n) được gọi là biến ngẫu nhiên có phân phối rời rạc đều. Bảng phân phối xác suất của nó có dạng:

$X= x_i$	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$P(X= x_i)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

Ta có : $EX = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (trung bình cộng)

$$DX = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

b) Biến ngẫu nhiên có phân phối nhị thức

Biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối nhị thức B(n, p) với tham số n và p $(0 < p < 1)$, viết là $X \approx B(n, p)$ nếu X có bảng phân phối:

X= k	0	1	...	k	...	n
P(X=k)	$C_n^0(1-p)^n$	$C_n^1 p(1-p)^{n-1}$	...	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	...	$C_n^n p^n$

Rõ ràng $\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 1$ (xem II.4. về Nhị thức Niu-tơn)

Dễ dàng tính được : $EX = np$; $DX = np(1-p)$

Trong thực tế đối với một phép thử bất kỳ có một biến cố A nào đó liên quan đến phép thử với xác suất $p = P(A)$ $(0 < p < 1)$ thì nếu lặp lại phép thử n lần và gọi X là số lần xuất hiện A trong n phép thử đó thì $X \approx B(n, p)$. Đặc biệt nếu coi phép thử là một tập hợp các phần tử trong đó tỷ lệ các phần tử có tính chất A nào đó là p $(0 < p < 1)$ thì khi lấy ngẫu nhiên ra n phần tử từ tập hợp này (có thể lấy hoàn lại hoặc không hoàn lại từng phần tử) và gọi X là số phần tử có tính chất A trong n phần tử lấy ra đó thì $X \approx B(n, p)$ (xem các ví dụ ở mục B)

c) Biến ngẫu nhiên có phân phối siêu bội

Biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối siêu bội H (N, M, n) nếu X có phân phối xác suất :

$p_k = P(X = k) = \frac{C_M^k . C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ với k = 0, 1, 2,…m; (m là số nhỏ nhất trong 2 số n và M

Ta có: $EX = \frac{n.M}{N} = np$ với $p = \frac{M}{N}$; $DX = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$

Trong thực tế, từ một tập hợp gồm N phần tử trong đó có M phần tử có tính chất A còn N – M phần tử có tính chất $\overline{A}$ thì nếu lấy ngẫu nhiên cùng một lúc ra n phần tử từ tập này và gọi X là số phần tử có tính chất A trong n phần tử lấy ra đó, $X \approx H$ (N, M, n) (xem ví dụ 4)

B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1: a) Gieo đồng thời 2 đồng xu. Gọi X là số lần xuất hiện mặt sấp (S).

Lập bảng phân phối xác suất của X?

b) Gieo một con xúc xắc. Gọi Y là số chấm xuất hiện khi gieo. Lập bảng phân phối xác suất của Y và tính kỳ vọng, phương sai.

Giải: a) Gieo 2 đồng xu có 4 kết quả SS, SN, NS, NN nên X là số lần xuất hiện mặt S thì X nhận các giá trị 0, 1, 2 với các xác suất :

$P(X = 0) = P(NN) = \frac{1}{4}$; $P(X = 1) = P(NS + SN) = \frac{2}{4}$; $P(X = 2) = P(SS) = \frac{1}{4}$

Do đó X có bảng phân phối xác suất là:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

b) Ta có bảng phân phối xác suất của Y là:

X=i	1	2	3	4	5	6
P(X=i)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$EX = 1.\frac{1}{6} + 2.\frac{1}{6} + 3.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 5.\frac{1}{6} + 6.\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$ (nằm giữa 1 và 6)

$DX = 1^2.\frac{1}{6} + 2^2.\frac{1}{6} + 3^2.\frac{1}{6} + 4^2.\frac{1}{6} + 5^2.\frac{1}{6} + 6^2.\frac{1}{6} - 3{,}5^2 = \frac{105}{36} = \frac{35}{12}$

Ví dụ 2: Cho biến ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất như sau:

X	0	1	2	3
P	0,15	0,30	?	0,20

a) Tính P(X = 2)? EX, DX?

b) Viết biểu thức hàm phân phối của X. Tính $P(1{,}5 \le X < 4)$; $P(X > 0)$?

Giải : a) Ta có $P(X = 2) = 1 - (0{,}15 + 0{,}30 + 0{,}20) = 0{,}35$ (vì $\sum p_i = 1$)

$EX = 0.0{,}15 + 1.0{,}3 + 2.0{,}35 + 3.0{,}2 = 1{,}6$

$DX = 0^2.0{,}15 + 1^2.0{,}3 + 2^2.0{,}35 + 3^2.0{,}2 - 1{,}6^2 = 0{,}94$

b) Hàm phân phối của X có dạng:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 0{,}15 & 0 < x \le 1 \\ 0{,}45 & 1 < x \le 2 \\ 0{,}80 & 2 < x \le 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

$P(1{,}5 \le X < 4) = F(4) - F(1{,}5) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$

(Do 4 thuộc khoảng x > 3 nên F(4) = 1; 1,5 thuộc khoảng $(1;2]$ nên

$F(1{,}5) = 0{,}45$);

$P(X > 0) = 1 - P(X \le 0) = 1 - F(0) - P(X=0) = 1 - 0 - 0{,}15 = 0{,}85.$

Ta cũng có thể tính trực tiếp các xác suất trên từ bảng phân phối xác suất:

$P(1{,}5 \le X < 4) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}35 + 0{,}2 = 0{,}55$ (vì trong khoảng (1,5; 4), X nhận 2 giá trị là 2 và 3);

$P(X > 0) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}30 + 0{,}35 + 0{,}20 = 0{,}85.$

Ví dụ 3: Một phòng máy có 3 máy tính làm việc tốt trong ngày với xác suất tương ứng là 0,90; 0,95và 0,99. Gọi X là số máy tính hỏng (không làm việc tốt trong ngày).

a) Lập bảng phân phối xác suất của X

b) Khả năng cả 3 máy làm việc tốt trong ngày là bao nhiêu %?

c) Xác suất để trong ngày không có quá 2 máy hỏng là bao nhiêu ?

Giải: Gọi A_i là biến cố máy i làm việc tốt trong ngày. X là số máy hỏng (không làm việc tốt trong ngày) thì X nhận các giá trị 0, 1, 2, 3. Ta có:

$P(X = 0) = P$ (cả 3 máy làm việc tốt) $= P(A_1A_2A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3)$ (do các máy làm việc độc lập) $= 0{,}9.0{,}95.0{,}99 = 0{,}84645$

$P(X = 1) = P$ (có 1 trong 3 máy hỏng) $= P(\overline{A_1}\,A_2A_3 + A_1\overline{A_2}\,A_3 + A_1A_2\overline{A_3})$

$= P(\overline{A_1}\,A_2A_3) + P(A_1\overline{A_2}\,A_3) + P(A_1A_2\overline{A_3})$

$= P(\overline{A_1}).P(A_2).P(A_3) + P(A_1).P(\overline{A_2}).P(A_3) + P(A_1).P(A_2).P(\overline{A_3})$

$= (1 - 0{,}9).0{,}95.0{,}99 + 0{,}9.(1 - 0{,}95).0{,}99 + 0{,}9.0{,}95.(1 - 0{,}99) = 0{,}14715$

$P(X = 2) = P$(có 2 trong 3 máy hỏng)

$= (1 - 0{,}9).(1 - 0{,}95).0{,}99 + (1 - 0{,}9).0{,}95.(1 - 0{,}99) + 0{,}9.(1 - 0{,}95)(1\ \ 0{,}99) = 0{,}00545$

$P(X = 3) = P$(cả 3 máy hỏng) $= (1 - 0{,}9).(1 - 0{,}95).(1 - 0{,}99) = 0{,}00005$

Do đó X có bảng phân phối xác suất:

X	0	1	2	3
P	0,84645	0,14715	0,00545	0,00005

b) Khả năng cả 3 máy làm việc tốt trong ngày là:

$P(X = 0) = 0{,}84645 = 84{,}645\%$

c) Xác suất để trong ngày không có quá 2 máy hỏng là:

$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$= 0{,}84645 + 0{,}14715 + 0{,}00545 = 0{,}99995$

Ví dụ 4: Một nhóm học sinh gồm 5 nam và 2 nữ. Chọn ngẫu nhiên ra 3 người. Gọi X là số nữ được chọn ra .

a) Lập bảng phân phối của X;

b) Tính EX, DX;

c) Tính xác suất để có ít nhất 1 bạn nữ được chọn ra?

Giải: a) Vì có 2 trong 7 học sinh là nữ và chọn ngẫu nhiên ra 3 người trong 7 người đó nên X là số nữ được chọn ra thì X có thể nhận các giá trị 0, 1, 2. Ta tính các xác suất tương ứng.

Trước hết ta thấy phép thử ở đây là chọn 3 trong 7 người nên số kết quả có thể có của phép thử là $C_7^3 = 35$

Gọi A là biến cố "trong 3 người chọn ra không ai là nữ" thì số kết quả thuận lợi cho A là $C_2^0.C_5^3 = 10$ (không người nữ nào được chọn ra trong 2 người nữ và 3 người còn lại chọn ra trong 5 người nam)

Ta có: $P(X = 0) = P(A) = \dfrac{10}{35} = \dfrac{2}{7}$

Tương tự nếu gọi B là biến cố "trong 3 người chọn ra có 1 người là nữ " thì số kết quả thuận lợi cho B là $C_2^1.C_5^2 = 2.10 = 20$ và ta có:

$$P(X = 1) = P(B) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

Còn nếu gọi C là biến cố 'trong 3 người chọn ra có 2 người là nữ' thì số kết quả thuận lợi cho C là $C_2^2.C_5^1 = 1.5 = 5$ và ta có: $P(X =2) = P(C) = \dfrac{5}{35} = \dfrac{1}{7}$

Do đó X có bảng phân phối xác suất là:

X	0	1	2
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

b) $EX = 0.\dfrac{2}{7} + 1.\dfrac{4}{7} + 2.\dfrac{1}{7} = \dfrac{6}{7}$

$$DX = 0^2.\frac{2}{7} + 1^2.\frac{4}{7} + 2^2.\frac{1}{7} = \frac{20}{49}$$

c) Xác suất để ít nhất 1 bạn nữ được chọn ra là:

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{4}{7} + \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$$

Nhận xét: Theo định nghĩa của biến ngẫu nhiên có phân phối siêu bội thì trong ví dụ này $X \cong \dot{H}\,(7, 2, 3)$ với bảng phân phối như trên.

Ví dụ 5: Một xạ thủ có xác suất bắn trúng bia của mỗi viên đạn là 0,8. Để xạ thủ này bắn 5 viên và gọi X là số lần anh ta bắn trúng bia.

a) X có phân phối gì? Viết ra bảng phân phối của X

b) Nếu mỗi đợt bắn 5 viên thì về trung bình xạ thủ đó bắn trúng mấy viên?

c)Tính xác suất anh ta bắn trúng ít nhất 3 viên?

Giải: a) Nếu coi mỗi lần bắn là một phép thử và bắn 5 viên là lặp lại 5 lần (n = 5) phép thử đó với xác suất trúng bia là p = 0,8 thì X là số đạn bắn trúng bia sẽ có phân phối nhị thức B (5; 0,8). Bảng phân phối của X (X nhận các giá trị k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 với $p_k = C_5^k\, 0{,}8^k\, 0{,}2^{5-k}$) là:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,3276

Nếu mỗi đợt bắn 5 viên thì về trung bình số viên mà xạ thủ này bắn trúng là:

EX = 5.0,8 = 4 viên

c) Xác suất anh ta bắn trúng ít nhất 3 viên là:

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$
$$= 0{,}2048 + 0{,}4096 + 0{,}32768 = 0{,}94208$$

C. ĐỀ BÀI TẬP

41. Xác định giá trị a để bảng dưới đây là bảng phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên rời rạc X nào đó:

X	0	1	2
P	$2a^2$	$3a^2$	4a

Tính kỳ vọng và phương sai của X theo giá trị a vừa tìm được.

42. Một hộp có 3 bi đỏ, 2 bi trắng và 5 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên đồng thời ra 3 bi. Gọi X, Y, Z lần lượt là số bi đỏ, bi trắng và bi xanh được lấy ra. Hãy lập bảng phân phối xác suất của X, Y, Z và tính các kỳ vọng của chúng.

43. Một người chơi cờ vua với xác suất thắng mỗi ván là 0,6. Anh ta chơi 5 ván cho đến khi thắng thì dừng lại. Gọi X là số ván cần chơi.

a) Hãy lập bảng phân phối xác suất của X

b) Về trung bình anh ta phải chơi mấy ván?

44. Một học sinh từ nhà đến trường phải qua 4 ngã tư. Xác suất gặp đèn đỏ ở mỗi ngã tư là 0,4 và thời gian chờ đèn đỏ mỗi lần là 1 phút. Gọi X là số ngã tư học sinh đó gặp đèn đỏ mỗi lần từ nhà tới trường.

a) X có phân phối gì? Viết bảng phân phối xác suất của X,

b) Viết biểu thức hàm phân phối của X,

c) Tính xác suất để có không quá 2 lần gặp đèn đỏ,

d) Mỗi lần từ nhà đến trường về trung bình học sinh này phải chờ đèn đỏ mất mấy phút?

45. Một người chơi xổ số lôtô 2 số với 10.000đ/vé. Nếu số trên vé mua trùng với 2 số cuối của giải đặc biệt thì anh ta được 700.000đ và không được đồng nào nếu vé không trùng số. Gọi X là số tiền thắng của mỗi lần chơi.

a) Lập bảng phân phối xác suất của X

b) Số tiền thắng trung bình của mỗi lần chơi là bao nhiêu?

46. Cho X có bảng phân phối xác suất:

X	3	5	x_3
P	0,5	0,3	p_3

Biết EX = 8, hãy tìm x_3 và p_3

47. Biến ngẫu nhiên X nhận các giá trị – 1, 0 và 1 với các xác suất p_1, p_2, p_3. Biết EX = 0,1 và DX = 0,89. Hãy tính các xác suất p_1, p_2 và p_3 ?

48. Cho biến ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất

X	1	2	3	4
P	0,2	0,15	?	0,4

a) Tính P(X = 3) và tính EX, DX?

b) Viết biểu thức hàm phân phối của X.

c) Tính $P(1{,}8 \le X < 3{,}2)$ và $P(X > 2)$?

49. Tỷ lệ học sinh khá giỏi ở khối lớp 11 của một trường THPT là 60%. Chọn ngẫu nhiên ra 30 học sinh khối 11 và gọi X là số học sinh khá giỏi được chọn ra.

a) X có phân phối gì? Về trung bình cứ 30 học sinh khối 11 thì có bao nhiêu học sinh khá giỏi?

b) Gọi Y là điểm thi môn Toán của học sinh khá giỏi của khối 11 và Y có bảng phân phối xác suất:

Y	6	7	8	9	10
P	0,15	0,2	0,4	0,2	0,05

Hãy cho biết điểm Toán trung bình của học sinh khá giỏi khối 11 là bao nhiêu? Khả năng đạt điểm giỏi (≥ 8điểm) của học sinh khá giỏi khối 11 là bao nhiêu %?

Chương III . DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

I. DÃY SỐ

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Phương pháp quy nạp toán học: Để giải quyết nhiều bài toán liên quan đến các số tự nhiên $n \in N$, người ta thường sử dụng một phương pháp gọi là phương pháp quy nạp toán học (gọi tắt là phương pháp quy nạp). Phép chứng minh bằng quy nạp gồm hai bước sau:

Bước 1 : (bước cơ sở) Kiểm tra mệnh đề đúng với n = 0 (hay n = p, $p \in N^*$).

Bước 2 : (bước quy nạp) Giả sử mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì

$n = k \ge 0$ (hay $n = k \ge p$), khi đó chứng minh rằng mệnh đề đúng với

n = k + 1. Từ đó khẳng định mệnh đề đúng với mọi $n \in N$.

2. Định nghĩa dãy số

a) Mỗi hàm số u xác định trên tập số tự nhiên N* được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu :

$$\begin{aligned} u\ &: N^* \to \mathbb{R} \\ &\ \ n \to u(n) \end{aligned}$$

Thường viết dãy số dưới dạng khai triển :

$u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$, trong đó $u_n = u(n)$ hoặc vắn tắt là (u_n) và gọi u_n là số hạng tổng quát của dãy số.

b) Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1,2,3,...,m\}$ với $m \in N^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn. Dạng khai triển của nó $u_1, u_2, ..., u_m$.

3. Cách cho một dãy số : Một dãy số có thể được cho bởi các cách sau :

- Cho bằng công thức của số hạng tổng quát u_n
- Cho bằng phương pháp mô tả
- Cho bằng công thức truy hồi

4. Một số loại dãy số quan trọng

a) Dãy số tăng, dãy số giảm

- Dãy số (u_n) được gọi là tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in N^*$
- Dãy số (u_n) được gọi là giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in N^*$
- Các dãy số tăng và các dãy số giảm được gọi chung là dãy số đơn điệu.

b) Dãy số bị chặn

- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho: $\forall n \in N^*, u_n \le M$
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho: $\forall n \in N^*, u_n \ge m$
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn, nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại hai số m, M sao cho: $\forall n \in N^*, m \le u_n \le M$

B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với $\forall n \in N^*$ thì $n^5 - n$ chia hết cho 5

Giải : Đặt $A_n = n^5 - n$.

Bước 1 : Với n = 1, ta có $A_1 = 1^5 - 1 = 0$. Vậy A_1 chia hết cho 5.

Bước 2 : Giả sử ta có $A_k = (k^5 - k) \vdots 5$ (giả thiết quy nạp). Khi đó ta có :

$$A_{k+1} = (k+1)^5 - (k+1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1$$
$$= (k^5 - k) + (5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k).$$

Vì theo giả thiết quy nạp

$A_k = (k^5 - k) \vdots 5$, và $5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k = 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) \vdots 5$ nên

$A_{k+1} \vdots 5$. Vậy $(n^5 - n) \vdots 5 \quad \forall n \in N^*$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng $n^2 > 2(k+1) + 9$ với mọi số tự nhiên $n \ge 5$

Giải: Với n = 5 mệnh đề đúng vì $5^2 = 25 > 2.5 + 9 = 19$

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \ge 5$, tức là $k^2 > 2k + 9$, ta phải chứng minh rằng khi đó $(k+1)^2 > 2(k+1) + 9$

Thật vậy, ta có $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 = k^2 - 2k - 9 + 4k + 10$
$$= (k^2 - 2k - 9) + 2(k+1) + 9 + (2k - 1) > 2(k+1) + 9$$

(vì $k^2 - 2k - 9 > 0$ theo giả thiết quy nạp, $2k - 1 > 0 \ \forall k \ge 5$)

Vậy mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \ge 5$.

Ví dụ 3 : Chứng minh rằng với mọi $n \in N^*$:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Giải : Đặt $A_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$

Với n = 1, ta có $A_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ đẳng thức là đúng

Giả sử với n = k, công thức đúng, tức là:

$$A_k = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Với giả thiết quy nạp ta phải chứng minh công thức cũng đúng với k +1, tức

$A_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$ Thật vậy, $A_{k+1} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$= A_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$ (vì theo giả thiết quy nạp $A_k = \frac{k}{k+1}$).

Vậy công thức đúng với mọi n $\in N^*$

Ví dụ 4: Chứng minh đẳng thức

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + ... + \cos^2 nx = \frac{n}{2} + \frac{\sin nx.\cos(n+1)x}{2\sin x}$$ với mọi n $\in N^*$, $x \neq k\pi$

Giải: Đặt $A_n = \cos^2 x + \cos^2 2x + ... + \cos^2 nx$

Với n = 1 có $A_1 = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sin x.\cos 2x}{2\sin x}$, tức đẳng thức trên đúng.

Giả sử đẳng thức trên đúng với n = k, tức là

$$A_k = \cos^2 x + \cos^2 2x + ... + \cos^2 kx = \frac{k}{2} + \frac{\sin kx.\cos(k+1)x}{2\sin x}.$$

Khi đó, với n = k + 1, có

$$A_{k+1} = \cos^2 x + \cos^2 2x + ... + \cos^2(k+1)x = A_k + \cos^2(k+1)x$$

$$= A_k + \frac{1+\cos 2(k+1)x}{2} = \frac{k+1}{2} + \frac{\sin kx.\cos(k+1)x + \sin x.\cos 2(k+1)x}{2\sin x}$$

$$= \frac{k+1}{2} + \frac{\sin(2k+1)x - \sin x + \sin(2k+3)x - \sin(2k+1)x}{2.2\sin x}$$

$$= \frac{k+1}{2} + \frac{\sin(2k+3)x - \sin x}{2.2\sin 2x} = \frac{k+1}{2} + \frac{\sin(k+1)x.\cos(k+2)x}{2\sin x}$$

Từ đó công thức đúng với n = k + 1. Vậy đẳng thức là đúng.

Ví dụ 5: Xét tính đơn điệu của dãy số (u_n)

a) $u_n = 2n^2 - n + 1$; b) $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; c) $u_n = \frac{5}{n}$

Giải: Để xét tính đơn điệu của dãy số thường ta xét dấu của hiệu $u_{n+1} - u_n$

a) Ta có: $u_{n+1} - u_n = 2(n+1)^2 - (n+1) + 1 - (2n^2 - n + 1) = 4n + 1 > 0$ $\forall$ n $\in N^*$. Vậy dãy số (u_n) tăng .

b) Viết dãy số đã cho dưới dạng khai triển :

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ..., \left(-\frac{1}{2}\right)^n, ...$$

Từ đó dễ dàng thấy rằng $u_{n+1} - u_n$ đổi dấu khi n đổi từ lẻ sang chẵn, do đó dãy số (u_n) không tăng cũng không giảm.

c) Ta thấy $u_{n+1} - u_n = \frac{5}{n+1} - \frac{5}{n} = -\frac{5}{n(n+1)} < 0$ $\forall$ n $\in N^*$. Vậy dãy số đã cho giảm.

Ví dụ 6: Xét tính bị chặn của dãy số

a) $u_n = 5^n$; b) $u_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

Giải: Trước khi giải ta lưu ý rằng:

- Để chứng minh dãy số bị chặn trên (bị chặn dưới) ta phải tìm số M (số m) sao cho $u_n \leq$ M ($u_n \geq$ m) $\forall$ n $\in N^*$
- Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn, ta phải tìm số M > 0, sao cho $|u_n| \leq$ M $\forall$ n $\in N^*$ (vì điều này tương đương với $-M \leq u_n \leq M$, tức là dãy số bị chặn trên và bị chặn dưới)
- Để chứng minh dãy số (u_n) không bị chặn trên , ta phải chứng minh rằng với số A > 0 bất kì thì tồn tại số nguyên n = k sao cho $u_k > A$
- Để chứng minh dãy số (u_n) không bị chặn dưới ta phải chứng minh rằng với số B < 0 bất kì thì tồn tại số nguyên n = k sao cho $u_k < B$

a) Với $u_n = 5^n$ thì rõ ràng ta có:

$u_n > 0$ với mọi n $\in N^*$, do đó dãy số này bị chặn dưới (ở đây m = 0)

Trước khi chứng minh dãy số (u_n) không bị chặn trên, ta chứng minh bằng quy nạp rằng $5^n > n$ $\forall$ n $\in N^*$. Thật vậy, khi n = 1 ta có $5^1 = 5 > 1$, do đó bất đẳng thức là đúng. Giả sử bất đẳng thức đúng với một số tự nhiên bất kì n = k (k ≥ 1), tức là $5^k > k$ (*). Khi đó với n = k + 1 , ta có theo (*)

$5^{k+1} = 5.5^k > 5k > k + 1$. Vậy $5^n > n$ $\forall n \in N^*$

Như vậy với số A > 0 bất kì , tồn tại số nguyên k > A và theo chứng minh vừa rồi ($5^k > k$) suy ra $u_k = 5^k > A$ tức dãy $u_n = 5^n$ không bị chặn trên.

b) Dễ dàng thấy rằng với mọi ∀ n ∈N*, ta có

$|u_n| = \left|\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right| = \left|\left(\frac{2}{3}\right)^n\right| < 1$. Vậy dãy số đã cho bị chặn

Ví dụ 7: Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{6} \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + 5u_n} \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

là dãy số tăng và bị chặn trên.

Giải: Trong bài này việc xét dấu của hiệu ($u_{n+1} - u_n$) một cách trực tiếp là không thuận lợi, cho nên ta sẽ giải bằng phương pháp quy nạp cho cả 2 phần

a) Ta chứng minh dãy số (u_n) tăng bằng phương pháp quy nạp, tức là chứng minh

$u_{n+1} > u_n$ ($\forall n \in N^*$) (*)

- Ta có : $u_1 = \sqrt{6}$, $u_2 = \sqrt{6 + 5\sqrt{6}} > \sqrt{6} = u_1$. Vậy (*) đúng khi n =1
- Giả sử (*) đúng với một số tự nhiên bất kì n = k (k ≥ 1), tức là $u_{k+1} > u_k$.

  Ta có $u_{k+2} = \sqrt{6 + 5u_{k+1}} > \sqrt{6 + 5u_k} = u_{k+1}$ (đpcm), vì theo giả thiết quy nạp $u_{k+1} > u_k$.

b) Chứng minh dãy số đã cho bị chặn trên bởi số 7 (các em có thể chọn một số bất kì lớn hơn 6) bằng phương pháp quy nạp, tức là chứng minh $u_n \leq 7$ ($\forall n \in N^*$) (1).

- Ta có $u_1 = \sqrt{6} < 7$. Vậy (1) đúng khi n = 1
- Giả sử (1) đúng với số tự nhiên bất kì n = k (k ≥ 1), tức là $u_k \leq 7$, ta phải chứng minh $u_{k+1} \leq 7$.

  Ta có $u_{k+1} = \sqrt{6 + 5u_k} \leq \sqrt{6 + 5.7} = \sqrt{41} < \sqrt{49} = 7$ (đpcm)

C. ĐỀ BÀI TẬP

1. Bằng phương pháp quy nạp hãy chứng minh các đẳng thức sau:

a) $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + ... + \sin nx = \dfrac{\sin\frac{nx}{2} . \sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ... + \frac{1}{3^n} = \frac{3^n - 1}{2.3^n}$; d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

2. Bằng quy nạp chứng minh rằng

a) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133 với mọi n ∈ N

b) $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9 với mọi n ∈ N*

3. Bằng phương pháp quy nạp chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$ với n ≥ 2

b) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$ với n > 1

c) $n^2 > 4n + 11$, với n ≥ 6

4. Viết năm số hạng đầu của dãy số (u_n) :

a) $u_n = \frac{2n}{(-1)^n}$; b) $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$; c) $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{nếu n chẵn} \\ \frac{n-1}{n}, & \text{nếu n lẻ} \end{cases}$

5. Viết sáu số hạng đầu của dãy số (u_n) sau đây:

a) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 3} \end{cases} (n = 1.2....)$ b) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \end{cases} (n = 1,2,...)$

c) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n + 3) \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_1 = 10 \\ u_2 = 7 \\ u_{n+2} = u_n - 2u_{n+1} \end{cases}$

6. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi công thức truy hồi:

a) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$

7. Xét tính đơn điệu của dãy số (u_n), biết :

a) $u_n = 3n^2 - 5n - 9$; b) $u_n = (-1)^n(3^n + 2)$

c) $u_n = 3n + \sin n$; d) $u_n = \dfrac{3n+2}{7n+3}$

e) $u_n = (-1)^n + 3$

8. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n), biết rằng

a) $u_n = \dfrac{3}{(n+1)(n+3)}$; b) $u_n = 3\sin 4n + 4\cos n$.

c) $u_n = -2 + \cos(3n + 2)$; d) $u_n = 3n - 10$

9. Các dãy số sau được cho bởi công thức truy hồi. Hãy chứng minh rằng chúng là các dãy số tăng và bị chặn trên:

a) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{10 + 8u_n} \quad (n \geq 1) \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_1 = \dfrac{a}{2} & 0 < a < 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{u_n^2}{2} & n \geq 1 \end{cases}$

Hai bài tập sau thuộc loại các câu hỏi trắc nghiệm. Các em hãy khoanh vào đáp án đúng.

10. Với mọi $n \in N^*$ ta có: $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ chia hết cho

A) 2 ; B) 3 ; C) 4 ; D) 6 ;

11. Trong các mệnh đề cho dưới đây

a) Cho dãy số vô hạn 2, 4, 6, 8, 10,...

b) Cho dãy số vô hạn 5, 10, 15, 20, 25, ...5n

c) Cho dãy số vô hạn 3, 9, 27, 81, 243, ..., 3^n,....

d) Cho dãy số vô hạn 1, 3, 5, 7, 9, ..., 2n + 1,....

Mệnh đề đúng là :

A) a) ; B) b) ; C) c) ; D) d) ;

12. Dãy số Phibônasi là dãy số vô hạn xác định bởi

$u_1 = u_2 = 1$; $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ (n = 3,4,....)

Số hạng thứ 10 (u_{10}) bằng :

A) 40 ; B) 55 ; C) 50 ; D) 48 ; E) 51 ;

II. CẤP SỐ CỘNG

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Định nghĩa : Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d. Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

- Ta đặt kí hiệu ÷ trước một dãy số để chỉ rõ nó là một cấp số cộng
- Đối với một cấp số cộng ta có công thức truy hồi :

$$u_{n+1} = u_n + d \text{ với } n \in N^*$$

- Đặc biệt khi d = 0 thì cấp số cộng là một dãy số không đổi.

2. Số hạng tổng quát: Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu là u_1 và công sai là d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bằng công thức :

$$u_n = u_1 + (n-1)d \text{ với } n \geq 2 \qquad (1)$$

3. Tính chất các số hạng của cấp số cộng : Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng, trừ số hạng đầu và cuối, đều là trung bình cộng của số hạng đứng kề với nó, tức là :

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, \text{ với } k \geq 2 \qquad (2)$$

4. Tổng n số hạng đầu của cấp số cộng : Cho cấp số cộng (u_n). Khi đó

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \qquad (3)$$

Hay
$$S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} \qquad (4)$$

B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1: Xác định cấp số cộng có các số hạng thứ năm bằng 6 và thứ 10 bằng (– 9)

Giải: Một cấp số cộng được hoàn toàn xác định nếu ta biết số hạng đầu tiên và công sai của nó. Theo đầu bài, có:

$$\begin{cases} u_5 = u_1 + 4d = 6 \\ u_{10} = u_1 + 9d = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 6 \\ 5d = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 18 \\ d = -3 \end{cases}$$

Ta có thể viết cấp số cộng này dưới dạng khai triển sau:

÷ 18, 15, 12, 9, ... , 21 – 3n ,....

Ví dụ 2: Xen vào giữa $\frac{1}{2}$ và $\frac{11}{2}$ bốn số để được một cấp số cộng.

Giải: Ta có một cấp số cộng hữu hạn gồm 6 số, trong đó có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{2}$ và số hạng cuối $u_6 = \frac{11}{2}$. Để có cấp số cộng ta phải tìm công sai của nó. Ta có: $u_6 = u_1 + (6-1)d \Leftrightarrow \frac{11}{2} = \frac{1}{2} + 5d \Leftrightarrow d = 1$. Vậy bốn số phải tìm là : $u_2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$; $u_3 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$; $u_4 = \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}$; $u_5 = \frac{7}{2} + 1 = \frac{9}{2}$

Ví dụ 3: Tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng sau:

÷ $9\sqrt{3} - 2,\ 6\sqrt{3}$ ......

Giải: Biết hai số hạng đầu u_1 và u_2 của một cấp số cộng ta tìm ra công sai của nó, sau đó áp dụng công thức (4). Ta có:

$$d = u_2 - u_1 = 6\sqrt{3} - (9\sqrt{3} - 2) = 2 - 3\sqrt{3}$$

Theo công thức (4), có:

$$S_n = \frac{n}{2}[\,2u_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}\left[(9\sqrt{3} - 2)2 + (n-1)(2 - 3\sqrt{3})\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[18\sqrt{3} - 4 - 2 + 3\sqrt{3} + (2 - 3\sqrt{3})n\right] = \frac{n}{2}\left[21\sqrt{3} - 6 + (2 - 3\sqrt{3})n\right]$$

Ví dụ 4: Trong vật lí, người ta biết rằng một vật rơi tự do theo quy luật : trong giây đầu vật đi được 4,9 m, trong mỗi giây sau vật đi được một quãng đường dài hơn 9,8 m so với quãng đường đi được trong giây trước.

a) Hỏi quãng đường trong giây thứ 11 là bao nhiêu?

b) Hỏi quãng đường đi được sau 11 giây là bao nhiêu ?

c) Cần bao nhiêu thời gian để vật rơi từ độ cao 4410 m đến mặt đất ?

Giải: Biểu diễn quãng đường đi được của vật trong giây đầu tiên, giây thứ hai, ta có dãy số : 4,9 ; 14,7 ; 24,5 ; ...., đây coi như là một cấp số cộng với số hạng đầu là $u_1 = 4{,}9$ và công sai d = 9,8

a) $u_{11} = u_1 + 10d = 4{,}9 + 10.9{,}8 = 102{,}9$ (m)

b) $S_{11} = \frac{u_1 + u_{11}}{2}.11 = \frac{4{,}9 + 102{,}9}{2}.11 = 592{,}9$ (m)

c) Giả sử số thời gian cần tìm là n (giây). Theo đề bài ta có phương trình sau đối với n:

$$S_n = \frac{2u_1 + (n-1)d}{2}.n = 4410$$

Thay d = 9,8 ; $u_1 = 4{,}9$ ta có phương trình : $n^2 = 8820 \Rightarrow n = 30$ (giây)

Vậy sau 30 giây vật sẽ rơi đến mặt đất

Ví dụ 5: Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm lập thành một cấp số cộng:

$$x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0$$

Giải: Điều kiện để phương trình trùng phương có bốn nghiệm là phương trình bậc hai : $t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0$ (*) có hai nghiệm dương (ở đây ta đặt $x^2 = t \geq 0$), tức là ta phải có:

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ \dfrac{c}{a}>0\\ -\dfrac{b}{a}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+1)^2-(2m+1)>0\\ 2m+1>0\\ m+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2>0\\ m>-\dfrac{1}{2}\\ m>-1\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<\mathrm{m}\neq 0$$

Nếu $x_2 > x_1 > 0$ là hai nghiệm của phương trình trùng phương thì $(-x_2)$ và $(-x_1)$ cũng là nghiệm của phương trình đó. Khi đó xếp theo thứ tự tăng dần ta có các nghiệm là $-x_2, -x_1, x_1, x_2$. Theo đầu bài bốn số này lập thành một cấp số cộng, nên công sai của cấp số đó là $d = x_1 - (-x_1) = 2x_1$. Vậy bốn số đó là $-3x_1, -x_1, x_1, 3x_1$ (x_1 là một nghiệm của phương trình). Khi đó x_1^2 và $9x_1^2$ là nghiệm của (*). Theo định lí Viét ta có:

$$\begin{cases}x_1^2+9x_1^2=2(m+1)\\ x_1^2.9x_1^2=2m+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1^2=\dfrac{m+1}{5}\\ x_1^4=\dfrac{2m+1}{9}\end{cases} \Rightarrow \left(\frac{m+1}{5}\right)^2=\frac{2m+1}{9}$$

$$\Leftrightarrow 9\mathrm{m}^2-32\mathrm{m}-16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=4\\ m=-\dfrac{4}{9}\end{array}\right.$$

Hai giá trị này đều thoả mãn điều kiện $-\frac{1}{2}<\mathrm{m}\neq 0$

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu $\tan\frac{A}{2}$, $\tan\frac{B}{2}$ và $\tan\frac{C}{2}$ lập thành một cấp số cộng thì cosA, cosB, cosC cũng lập thành một cấp số cộng.

Giải: Dựa trên công thức (2) về tính chất các số hạng của cấp số cộng, từ điều kiện đã cho, ta phải chứng minh được rằng cosA + cosC = 2cosB.

Ở đây cần lưu ý rằng trong tam giác ABC bất kì ta luôn có $\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{A+C}{2}$ và $\cos\frac{B}{2}=\sin\frac{A+C}{2}$. Ngoài ra phải áp dụng một cách linh hoạt các công thức lượng giác.

Ta có : $\div \tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2} \Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}=2\tan\frac{B}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\dfrac{A+C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{C}{2}}=2\frac{\sin\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}} \Leftrightarrow \frac{\cos\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{C}{2}}=\frac{\sin\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}\left(\cos\frac{A+C}{2}+\cos\frac{A-C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{B}{2}=\sin^2\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{A-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{B}{2}=\cos\frac{A+C}{2}.\cos\frac{A-C}{2} \Leftrightarrow \mathrm{cosB}=\frac{1}{2}(\mathrm{cosA}+\mathrm{cosC})$$

$$\Leftrightarrow 2\mathrm{cosB}=\mathrm{cosA}+\mathrm{cosC}$$

tức là ba số cosA, cosB, cosC lập thành một cấp số cộng.

C. ĐỀ BÀI TẬP

13. Trong các cấp số cộng sau, tìm “?” theo những yếu tố đã cho:

a) $u_1 = 2\sqrt{5}+3$; $d = 1-\sqrt{5}$; $u_{20} = ?$

b) Cho $\div$ 4; 6,5; .... $u_{30} = ?$

c) $u_1 = -\frac{3}{5}$; $d = \frac{3}{2}$; $u_8 = ?$

d) Cho $\div \sqrt{2}+1$; 2 ; .... $u_{14} = ?$

14. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

a) $u_4 = 20$; $u_{10} = 72$;

b) $u_2 = -8$; $u_7 = 3$

c) $\begin{cases}u_7-u_3=8\\ u_2.u_7=75\end{cases}$;

d) $\begin{cases}u_7+u_{15}=60\\ u_4^2+u_{12}^2=1170\end{cases}$

15. Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng các số a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi các số $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ lập thành một cấp số cộng.

16. Tìm bốn số nguyên khác nhau lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu bằng tổng bình phương của ba số hạng còn lại.

17. Chứng minh rằng nếu các cạnh của tam giác ABC thứ tự $a < b < c$ lập thành cấp số cộng thì $ac = 6Rr$, trong đó r, R tương ứng là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác đó.

18. Hãy chứng minh : Trong ΔABC nếu cotA, cotB, cotC theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì a^2, b^2, c^2 cũng lập thành một cấp số cộng.

19. Cho $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ và các số cotA, cotB, cotC theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tính giá trị biểu thức cotA.cotC ?

20. Tìm bốn số lập thành một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 6 và tổng các bình phương của chúng bằng 54.

21. Xen kẽ bảy số giữa các số 6 và 50 để được một cấp số cộng.

22. Giải phương trình : $-7 - 1 + 5 + 11 + ... + x = 112$

trong đó x là số hạng thứ n của cấp số cộng : $\div -7 ; -1 ;...$

23. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} x^3 - y^3 = m(x-y) \\ x + y = -1 \end{cases}$

Tìm m để hệ có 3 nghiệm phân biệt (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) với x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng và trong ba số đó có hai số có giá trị tuyệt đối lớn hơn 1.

Những bài sau là những câu hỏi trắc nghiệm

24. Cho cấp số cộng với $u_3 + u_5 = 14$; $S_{12} = 129$; $u_n = 23{,}5$. Khi đó n bằng:

A) 11 ; B) 12 ; C) 15 ; D) 20 ; E) 30 ;

25. Cho cấp số cộng với $u_5 = 19$; $u_9 = 35$. Khi đó số hạng đầu tiên u_1 bằng

A) 2 ; B) 1 ; C) – 2 ; D) – 1 ; E) 3 ;

26. Cho cấp số cộng với $u_7 - u_3 = 8$. Khi đó công sai d bằng :

A) 2 ; B) 3 ; C) – 2 ; D) – 1 ; E) 1

27. Cho cấp số cộng với $\begin{cases} u_3 + u_9 = 6 \\ u_3.u_9 = \dfrac{135}{16} \end{cases}$ và d > 0. Khi đó S_{16} bằng

A) 48 ; B) 58 ; C) 56 ; D) $\frac{105}{2}$; E) $\frac{75}{2}$

28. Cho cấp số cộng với $\begin{cases} u_2 u_5 = \dfrac{27}{4} \\ u_6 = 2u_3 + \dfrac{1}{2} \end{cases}$ khi đó u_1 bằng

A) $\frac{1}{3}$; B) 1 ; C) – 1 ; D) 2 ; E) $\frac{1}{2}$

III. CẤP SỐ NHÂN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Định nghĩa : Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q. Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

- Để chỉ dãy số (u_n) là cấp số nhân, ta viết $\div\div$ (u_n), hay $\div\div\, u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$
- Với $\div\div(u_n)$ công bội q, ta có công thức truy hồi : $u_{n+1} = u_n.q$ với $n \in N^*$
- Khi q = 0, ta có $\div\div\, u_1, 0, 0, ..., 0, ...$
- Khi q = 1 ta có $\div\div\, u_1, u_1, u_1, ..., u_1, ...$
- Khi q = – 1 ta có $\div\div\, u_1, -u_1, u_1, ..., (-1)^{n-1} u_1, ...$

2. Số hạng tổng quát : Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức :

$$u_n = u_1.q^{n-1} \text{ với } n \geq 2 \qquad (1)$$

3. Tính chất các số hạng của cấp số nhân: Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng, trừ số hạng đầu và cuối, đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, tức là:

$$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1} \quad \text{với } k \geq 2 \qquad (2)$$

(hay $|u_k| = \sqrt{u_{k-1}.u_{k+1}}$)

4. Tổng n số hạng đầu của một số cấp số nhân : Cho cấp số nhân (u_n) với công bội q ≠ 1. Khi đó tổng n số hạng đầu của nó sẽ là:

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} \text{ hay } S_n = \frac{u_1(q^n-1)}{q-1} \qquad (3)$$

c) Nếu cấp số nhân có q = 1 thì S_n = n. u_1

d) Nếu cấp số nhân có q = – 1 thì $S_n = \left[\begin{array}{ll} u_1, & \text{nếu n lẻ} \\ 0, & \text{nếu n chẵn} \end{array}\right.$

e) Nếu cấp số nhân có q = 0 thì $S_n = u_1$

B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1: Cho cấp số nhân : ÷÷ $\sqrt{3} + 1$; $\sqrt{3} + 3$; .....

Tìm số hạng thứ 9 và tổng 12 số hạng đầu của nó.

Giải: Trước hết, ta phải tìm công bội của cấp số nhân đã cho.

Vì $u_2 = q u_1$ nên $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}$.

Áp dụng (1) ta có: $u_9 = u_1 q^8 = \left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}\right)^8 = 81\left(\sqrt{3}+1\right)$

Áp dụng (3) ta được :

$$S_n = \frac{u_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left[\left(\sqrt{3}\right)^{12}-1\right]}{\sqrt{3}-1} = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right).728}{\sqrt{3}-1} = 364.\left(4+2\sqrt{3}\right).$$

Ví dụ 2: Xác định số hạng đầu và công bội của một cấp số nhân, biết

$$\begin{cases} u_1 - u_2 + u_3 = 9 \\ u_1 + u_4 = 27 \end{cases}$$

Giải: Từ hệ đã cho, thay u_1, u_2, u_3 theo công thức qua u_1 và q, ta được một hệ có hai phương trình hai ẩn là u_1 và q. Ta có:

$$\begin{cases} u_1 - u_1 q + u_1 q^2 = 9 \\ u_1 + u_1 q^3 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1-q+q^2) = 9 & (*) \\ u_1(1+q^3) = 27 & (**) \end{cases}$$

Trong (*) và (**), rõ ràng $u_1 \neq 0$ và $1 - q + q^2 \neq 0$. Chia (**) cho (*) được

$$\frac{1+q^3}{1-q+q^2} = 3 \Leftrightarrow 1 + q = 3 \Leftrightarrow q = 2$$

Từ (*) ta có: $u_1 = \frac{9}{1-q-q^2} = \frac{9}{3} = 3$. Vậy $u_1 = 3$ và q = 2

Ví dụ 3: Trong một cấp số nhân có 7 số hạng, biết $u_1 = 3$, $u_7 = 192$. Tính tổng S của các số hạng đó.

Giải: Với cấp số nhân này ta đã biết u_1 và u_7 (tức n = 7), ta tìm công bội và từ công thức (3) ta tính tổng cần tìm. Ta có $u_7 = 192 \Leftrightarrow u_1.q^6 = 192$, mà $u_1 = 3$ nên

$$q^6 = \frac{192}{3} \Leftrightarrow q^6 = 64 \Leftrightarrow q^3 = \pm 8$$

(1) Với $q^3 = 8$, có q = 2 và S = $S_7 = \frac{3(q^7-1)}{q-1} = \frac{3.127}{1} = 381$

(2) Với $q^3 = -8$, có q = 2 và S = $S_7 = \frac{3((-2)^7-1)}{(-2)-1} = 3.\ \frac{-129}{-3} = 129$

Ví dụ 4: Tính tổng $S_n = \left(2+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2^2+\frac{1}{2^2}\right)^2 + ... + \left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)^2$

Giải: Vì $\left(2^k+\frac{1}{2^k}\right)^2 = 2^{2k} + \frac{1}{2^{2k}} + 2$ (k = 1, 2,..., n) nên bình phương từng số hạng trong S_n , ta được

$$S_n = \left(2^2+\frac{1}{2^2}+2\right) + \left(2^4+\frac{1}{2^4}+2\right) + ... + \left(2^{2n}+\frac{1}{2^{2n}}+2\right)$$

$$= (2^2 + 2^4 + ... + 2^{2n}) + \left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+ .... +\frac{1}{2^{2n}}\right) + 2n$$

Ta thấy trong mỗi dấu ngoặc là tổng của n số, mỗi số là số hạng của cấp số nhân, tức là trong mỗi dấu ngoặc là một tổng của một cấp số nhân tương ứng với công bội là 2^2, $\frac{1}{2^2}$ và 1. Áp dụng công thức (3) ta được

$$S_n = 2^2.\frac{2^{2n}-1}{2^2-1} + \frac{1}{2^2}.\frac{\frac{1}{2^{2n}}-1}{\frac{1}{2^2}-1} + 2n = 4.\frac{4^n-1}{3} + \frac{1-\frac{1}{4^n}}{3} + 2n$$

$$= \frac{1}{3}(4^{n+1} - 4 + 1 - 4^{-n}) + 2n = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 4^{-n}) + 2n - 1$$

Ví dụ 5: Tìm cấp số nhân biết rằng tổng ba số hạng đầu cửa chúng bằng 93 và theo thứ tự đó, chúng cũng là số hạng đầu, số hạng thứ hai và số hạng thứ bảy của một cấp số cộng.

Giải: Gọi ba số hạng đầu của cấp số nhân là a_1, a_2, a_3 và công bội là q. Theo đầu bài ta có $a_1 + a_2 + a_3 = 93 \Leftrightarrow a_1(1 + q + q^3) = 93$ (*)

Gọi bảy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1, u_2, \ldots, u_7$ và công sai là d.

Theo đầu bài, ta có:

$$\begin{cases} a_1 = u_1 \\ a_2 = u_2 \\ a_3 = u_7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = u_1 \\ a_1 q = u_1 + d \\ a_1 q^2 = u_1 + 6d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = u_1 \\ a_1(q-1) = d & (1) \\ a_1(q^2-1) = 6d & (2) \end{cases}$$

(1) Nếu q = 1 thì d = 0, từ (*) ta có $3a_1 = 93 \Leftrightarrow a_1 = 31$ và khi đó có cấp số nhân : ÷÷31, 31, 31,...

(2) Nếu q ≠ 1 thì chia (2) cho (1) ta được q + 1 = 6 ⇔ q = 5. Thay q = 5 vào (*) ta được : $a_1(1 + 5 + 25) = 93 \Leftrightarrow a_1 = 3$, và cấp số nhân cần tìm là ÷÷3, 15, 75, ...

Ví dụ 6: Tìm ba số dương có tổng bằng 15 lập thành một cấp số cộng. Nếu thêm 1 vào số hạng thứ nhất và thứ hai, thêm 4 vào số hạng thứ ba thì được ba số mới lập thành một cấp số nhân.

Giải: Gọi ba số cần tìm là a, b, c . Vì chúng lập thành một cấp số cộng nên b = a + d; c = a + 2d, ngoài ra a + b + c = 15 ⇔ a + (a + d) + (a + 2d) = 15

⇔ a + d = 5 (*) . Theo đầu bài ba số mới : a + 1 ; a + d + 1 ; a+ 2d + 4 lập thành một cấp số nhân và theo công thức (2) ta có :

$(a + d + 1)^2 = (a + 1)(a + 2d + 4)$ (**)

Từ (*) ta có d = 5 – a, thay d vào (**) ta có:

$$36 = (a + 1)(14 - a) \Leftrightarrow a^2 - 13a + 22 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 11 \\ a = 2 \end{array}\right.$$

(1) Với a = 11, có d = 5 – 11 = – 6, và ba số cần tìm là : 11, 5, – 1. Trường hợp này loại vì theo yêu cầu phải tìm ba số dương.

(2) Với a = 2, có d = 5 – a = 3 và ba số cần tìm là: 2, 5, 8. Ba số này đáp ứng yêu cầu. Vậy ba số phải tìm là 2, 5, 8.

C. ĐỀ BÀI TẬP

29. Tìm số hạng đầu, công bội và tổng 10 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết

a) $\begin{cases} u_4 = 48 \\ u_6 = 192 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$

30. Tìm các số hạng của một cấp số nhân biết

a) Cấp số đó có 5 số hạng, số hạng đầu bằng 2, số hạng cuối bằng 512

a) Cấp số có 6 số hạng, số hạng đầu bằng 512, số hạng cuối bằng 1

a) Cấp số có sáu số hạng, tổng ba số hạng đầu bằng 168, tổng ba số hạng sau bằng 21.

31. Xen kẽ giữa 3 và 192 năm số nữa để được một cấp số nhân.

32. Một tỉnh có dân số là 1,4 triệu người và có tỉ lệ tăng dân số hàng năm là 2%. Hỏi số dân của tỉnh đó sau 5 năm và 10 năm là bao nhiêu?

33. Hãy xác định a, b sao cho 1, a, b lập thành một cấp số cộng và các số 1, a^2, b^2 lập thành một cấp số nhân.

34. Ba số có tổng bằng 21 lập thành một cấp số cộng. Nếu số hạng thứ hai bớt đi 1 và thêm 1 vào số hạng thứ ba thì ta được ba số mới theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tìm cấp số cộng.

35. Cho một hình hộp chữ nhật có thể tích là 27, diện tích toàn phần là 9a và các cạnh lập thành một cấp số nhân.

a) Tính các cạnh của hình hộp đó với a = 6?

b) Xác định a để tồn tại một hình hộp chữ nhật có các tính chất trên?

36. Chứng minh rằng nếu ba cạnh của một tam giác lập thành một cấp số nhân thì công bội của nó phải nằm giữa hai số : $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$ và $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$

37. Độ dài các cạnh của một tam giác lập thành cấp số nhân. Chứng minh rằng độ lớn hai góc nhọn không quá 60^0.

38. Tìm ba số có tổng bằng 26 lập thành một cấp số nhân. Thêm 1, 6 và 3 theo thứ tự vào các số đó thì được ba số mới lập thành một cấp số cộng.

39. Tìm cấp số cộng và cấp số nhân biết số hạng đầu của chúng bằng 5, số hạng thứ ba của chúng bằng nhau, số hạng thứ hai của cấp số cộng hơn số hạng thứ hai của cấp số nhân là 10.

Các bài tập sau là các câu hỏi trắc nghiệm. Hãy khoanh vào câu trả lời đúng

40. Cho cấp số nhân:

$$\div\div 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{2^{n-1}}, ...\qquad (n = 1, 2,....). \text{ Khi đó } u_{10} \text{ bằng}$$

A) 2^9 ; B) 2^8 ; C) 2^{-8} ; D) 2^{-9} ; E) 2^{-7} ;

41. Một cấp số nhân có bốn số hạng, biết $q = u_1 > 0$ và tổng hai số hạng đầu là $\frac{4}{9}$.

Cấp số nhân đó là

A) $\div\div 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$; B) $\div\div \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$;

C) $\div\div \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}$; D) $\div\div 2, 4, 8, 16$;

E) $\div\div \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$

42. Cho cấp số nhân : $\div\div 2, -4, 8, -16$,.....Khi đó S_8 bằng

A) – 170 ; B) 170 ; C) 160 ; D) – 160 ; E) 150

43. Cho cấp số nhân : $\div\div$ a, b, c, d có công bội q. Nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ là

A) a ; B) b ; C) c ; D) – d ; E) – q

Chương IV. GIỚI HẠN

I. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Dãy số có giới hạn

a) Dãy số có giới hạn 0

- Ta nói rằng dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn là 0 (hay có giới hạn 0) nếu kể từ một số hạng nào đó trở đi thì mọi số hạng của dãy đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý. Khi đó ta viết :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0, \text{ viết tắt là } \lim(u_n) = 0 \text{ hoặc } \lim u_n = 0 \text{ hoặc } u_n \to 0$$

- Như vậy, để chứng minh một dãy số có giới hạn 0 theo định nghĩa này, ta cần phải chỉ ra được số nguyên dương n_0 để từ số hạng thứ n_0 trở đi thì mọi số hạng của dãy có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý (ta gọi số dương bé tuỳ ý là ε

- Một số dãy có giới hạn 0 thường gặp là :

(i) $\lim\frac{1}{n^\alpha} = 0$ với $\alpha > 0$

(ii) $\lim q^n = 0$ với $|q| < 1$

(iii) $u_n = 0\ \forall n$ thì $\lim u_n = 0$

b) Dãy số có giới hạn

- Ta nói dãy (u_n) có giới hạn L nếu lim(u_n – L) = 0

Khi đó ta viết :

$$\lim(u_n) = L \text{ hoặc } \lim u_n = L \text{ hoặc } u_n \to L$$

- Chú ý là nếu dãy số có giới hạn hữu hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

2. Các phép toán về giới hạn

Giả sử $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$. Khi đó ta có:

a) $\lim(au_n \pm bv_n) = a\lim u_n \pm b\lim v_n = aL \pm bM$ (a,b là các hằng số)

b) $\lim(u_n . v_n) = \lim u_n . \lim v_n = L.M$

c) Nếu $M \neq 0$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{L}{M}$

d) $\lim u_n = |L|$; $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$

3. Các định lý cơ bản về giới hạn của dãy số

a) Nếu $u_n \leq v_n$ $\forall$ n và $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ thì $L \leq M$;

b) Nếu $u_n \leq v_n \leq w_n$ $\forall$ n và $\lim u_n = \lim w_n = L$ thì $\lim v_n = L$ (nguyên lý kẹp)

c) Nếu (u_n) là dãy số tăng và bị chặn trên thì tồn tại $\lim u_n$.

d) Nếu (u_n) là dãy số giảm và bị chặn dưới thì tồn tại $\lim|u_n|$.

4. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Cho cấp số nhân lùi vô hạn $u_1, u_1q, u_1q^2 ..., u_1q^n$,...với $|q| < 1$. Khi đó:

$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + ... + u_1q^n + ... = \dfrac{u_1}{1-q}$ là tổng của cấp số nhân đã cho.

5. Dãy số dần đến vô cực

a) Dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ nếu mọi số hạng của dãy đều lớn hơn một số dương lớn tuỳ ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Ta viết: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$, viết tắt là $\lim u_n = +\infty$ hoặc $u_n \to +\infty$.

Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ nếu mọi số hạng của dãy đều nhỏ hơn một số âm tuỳ ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi. Khi đó ta viết:

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = -\infty$, viết tắt là $\lim(u_n) = -\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ hoặc $u_n \to -\infty$.

Rõ ràng là $\lim(u_n) = -\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = +\infty$. Đồng thời nếu dãy (u_n) tăng và không bị chặn trên thì $\lim(u_n) = +\infty$, còn nếu dãy (u_n) giảm và không bị chặn dưới thì $\lim(u_n) = -\infty$.

b) *Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực của tích và thương*

Quy tắc 1	$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n . v_n)$
$\lim u_n = \pm\infty$ $\lim v_n = \pm\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Quy tắc 2	$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n . v_n)$
$\lim u_n = \pm\infty$ $\lim v_n = L$ hữu hạn	$+\infty$	$L > 0$	$+\infty$
	$+\infty$	$L < 0$	$-\infty$
	$-\infty$	$L > 0$	$-\infty$
	$-\infty$	$L < 0$	$+\infty$
Quy tắc 3	Dấu của L	Dấu của v_n	$\lim \dfrac{u_n}{v_n}$
$\lim u_n = L \neq 0$ $\lim v_n = 0$	+	+	$+\infty$
	+	−	$-\infty$
	−	+	$-\infty$
	−	−	$+\infty$

Nhờ các định lý này người ta tìm được một số giới hạn quan trọng là :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \ ; \quad \lim_{u_n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n} = e \ ; \quad \lim_{v_n\to 0}(1+v_n)^{\frac{1}{v_n}} = e$$

($e \approx 2,71828182...$) trong đó (u_n), (v_n) là các dãy số nào đó .

B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1: Dùng định nghĩa giới hạn của dãy số, chứng minh rằng:

a) $\lim \dfrac{2n}{n+2} = 2$; b) $\lim \dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+2} = 1$

Giải: a) Ta chứng minh $\lim\left(\dfrac{2n}{n+2}-2\right)=0$

Trước hết ta lấy $\varepsilon>0$ là số bé tuỳ ý. Ta có :

$\left|\dfrac{2n}{n+2}-2\right|=\dfrac{4}{n+2}$. Cho $\left|\dfrac{2n}{n+2}-2\right|<\varepsilon$ tức là $\dfrac{4}{n+2}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\dfrac{4}{\varepsilon}-2$

Ta lấy $n_0=\left[\dfrac{4}{\varepsilon}-2\right]+1$ ([ ] : kí hiệu phần nguyên) thì kể từ số hạng thứ n_0 trở đi mọi số hạng của dãy $\left(\dfrac{2n}{n+2}-2\right)$ có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương ε tuỳ ý bé (vì cách giải của ta là xuất phát từ việc cho $|\ |<\varepsilon$ để tìm n_0)

Do đó theo định nghĩa $\lim\left(\dfrac{2n}{n+2}-2\right)=0$ tức là $\lim\dfrac{2n}{n+2}=2$ (đfcm)

b) $\forall\ \varepsilon>0$, ta có:

$$\left|\frac{n^2+2n}{n^2+2n+2}-1\right|=\frac{2}{n^2+2n+2}<\frac{2}{n^2+2n+1}=\frac{2}{(n+1)^2}<\varepsilon\Leftrightarrow \text{n}>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}-1$$

Lấy $n_0=\left[\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}-1\right]+1$ ta thấy kể từ số hạng thứ n_0 trở đi mọi số hạng của dãy $\left(\dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+2}-1\right)$ có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương ε tuỳ ý bé. Do đó theo định nghĩa dãy $\left(\dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+2}-1\right)$ có giới hạn 0 tức dãy $\dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+2}$ có giới hạn là 1 hay $\lim\dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+2}=1$ (đpcm)

Ví dụ 2 : Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\dfrac{n^2+2\sqrt{n}+3}{2n^2+n-\sqrt{n}}$; b) $\lim u_n$ với $u_n=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}$

c) $\lim u_n$ với $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

Giải: a) $\lim\dfrac{n^2+2\sqrt{n}+3}{2n^2+n-\sqrt{n}}=\lim\dfrac{1+\dfrac{2}{n\sqrt{n}}+\dfrac{3}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n\sqrt{n}}}=\dfrac{\lim\left(1+\dfrac{2}{n\sqrt{n}}+\dfrac{3}{n^2}\right)}{\lim\left(2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)}$

$$=\frac{\lim 1+\lim\dfrac{2}{n\sqrt{n}}+\lim\dfrac{3}{n^2}}{\lim 2+\lim\dfrac{1}{n}-\lim\dfrac{1}{n\sqrt{n}}}=\frac{1+0+0}{2+0+0}=\frac{1}{2}$$

b) Ta viết $u_n=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}$

$=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}$. Do đó

$$\lim u_n=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\lim 1-\lim\frac{1}{n+1}=1-0=1.$$

c) Do $\sqrt{n^2+1}<\sqrt{n^2+2}<\ldots.<\sqrt{n^2+n}$ nên ta có:

$\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}<u_n<\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Vì $\lim\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$ nên $\lim u_n=1$

Ví dụ 3 : Chứng minh các dãy số sau đây có giới hạn

a) $u_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}$

b) $u_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}$

Giải: a) Ta chứng minh dãy (u_n) tăng và bị chặn trên.

Xét hiệu $u_{n+1}-u_n=\left(\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\ldots+\dfrac{1}{2n+2}\right)-\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}\right)$

$$=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0$$

Do vậy (u_n) là dãy tăng.

Ta có: $u_n < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$ tức là (u_n) bị chặn trên.

Vì thế dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn (đpcm)

b) Ta chứng minh dãy (u_n) tăng và bị chặn trên. Xét hiệu:

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

nên (u_n) là dãy tăng.

Ta viết $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$

Vế phải là: $1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n} < 2$

tức dãy (u_n) bị chặn trên bởi 2. Do đó dãy (u_n) có giới hạn (đpcm).

Ví dụ 4 : Chứng minh dãy số sau đây có giới hạn và tìm giới hạn đó:

$$u_1 = \sqrt{a},\ u_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}},\ ......\ u_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + ... + \sqrt{a}}}}}_{\text{n dấu căn}} \text{ với } a > 0.$$

Giải: Trước hết ta chứng minh dãy (u_n) tăng.

Thật vậy, ta có $u_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}} > \sqrt{a} = u_1$. Giả sử $u_{k+1} > u_k$ thì $a + u_{k+1} > a + u_k$ hay $\sqrt{a + u_{k+1}} > \sqrt{a + u_k}$ tức là $u_{k+2} > u_{k+1}$. Do đó (u_n) là dãy tăng.

Ta có :

$$u_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a} + 1,\ u_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}} < \sqrt{a + \sqrt{a} + 1} < \sqrt{a + 2\sqrt{a} + 1} = \sqrt{a} + 1$$

Giả sử $u_k < \sqrt{a} + 1$. Khi đó:

$$u_{k+1} = \sqrt{a + u_k} < \sqrt{a + \sqrt{a} + 1} < \sqrt{a + 2\sqrt{a} + 1} = \sqrt{a} + 1$$

Do đó dãy (u_n) bị chặn trên bởi $\sqrt{a} + 1$ với mọi n.

Như vậy dãy (u_n) tăng và bị chặn trên nên có giới hạn.

Đặt $L = \lim u_n$. Vì $u_{n+1} = \sqrt{a + u_n}$ nên $\lim u_{n+1} = \sqrt{a + \lim u_n}$ hay $L = \sqrt{a + L}$. Ta có $L^2 = a + L$ hay $L^2 - L - a = 0$

Giải ra được $L = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$. Vì $u_n > 0\ \forall$ n nên $\lim u_n = L \geq 0$. Do đó ta lấy giới hạn $L = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$.

Ví dụ 5 : a) Cho cấp số nhân $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, ..., \frac{1}{2^n}, ...$ Hãy tính tổng S của nó.

b) Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,313131...dưới dạng phân số.

Giải: a) $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} + ... = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$

$$\begin{aligned}
0{,}31313131... &= \frac{3}{10} + \frac{1}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{3}{100000} + \frac{1}{1000000} + ...\\
&= \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \frac{1}{10^6} + ...\\
&= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^5} + ... + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + ...\\
&= \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10^2}} + \frac{\frac{1}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{\frac{3}{10} + \frac{1}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{31}{99}
\end{aligned}$$

Vậy $0{,}31313131.... = \frac{31}{99}$

Nhận xét : Có thể viết $0{,}31313131... = \frac{31}{100} + \frac{31}{1000} + ...$

Ví dụ 6 : Tìm $\lim u_n$ với :

a) $u_n = \dfrac{3^n - 1}{2^n - 1}$; b) $u_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)n$; c) $u_n = q^n$ với $q > 1$

Giải: a) $\lim \dfrac{3^n - 1}{2^n - 1} = \lim \dfrac{1 - \dfrac{1}{3^n}}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{1}{3^n}} = \dfrac{\lim\left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right)}{\lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \lim\dfrac{1}{3^n}} = +\infty$

b) Ta viết $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)n = \dfrac{n(n+1-n)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > \dfrac{n}{2\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n}}{2}$

Do đó $\lim\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)n = +\infty$

c) Đặt $p = \dfrac{1}{q}$ thì $0 < q < 1$. Ta có $\lim p^n = \lim \dfrac{1}{q^n} = 0$ nên $\lim q^n = +\infty$

(hoặc $\lim q^n = \lim \dfrac{1}{\dfrac{1}{q^n}} = \dfrac{1}{\lim \dfrac{1}{q^n}} = +\infty$).

C. ĐỀ BÀI TẬP

1. Chứng minh các giới hạn sau:

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+1} - n\right) = \dfrac{1}{2}$; b) $\lim \dfrac{2n\sin n}{n^3+1} = 0$

c) $\lim\left(2 - \dfrac{(-1)^n}{n+2}\right) = 2$; d) $\lim\left(\dfrac{\sin 3n}{4n} - 1\right) = -1$

2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n+3}$; b) $\lim \dfrac{n^2 + \sqrt[3]{n^3+1} + n\sqrt{n}}{n\sqrt{n^2+1} + 3}$

c) $\lim \dfrac{3^n - 4^{n+1}}{3^{n+2} + 4^n}$; d) $\lim\left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$

e) $\lim \dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}$; f) $\lim \dfrac{1 + a + a^2 + \ldots + a^n}{1 + b + b^2 + \ldots + b^n}$ với $|a|, |b| < 1$

3. Chứng minh sự tồn tại giới hạn của dãy (u_n) và tìm giới hạn đó:

a) $u_1 = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$,...., $u_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{\text{n dấu căn}}$

b) u_n thoả mãn $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}} \quad n \geq 2$

c) u_n thoả mãn: $0 < u_n < 1$ và $u_{n+1}(1 - u_n) > \dfrac{1}{4} \quad \forall$ n = 1,2,....

4. a) Tìm tổng của cấp số nhân $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4\sqrt{2}}, \ldots.$

b) Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn là $\dfrac{5}{3}$, tổng của 3 số hạng đầu là $\dfrac{39}{25}$. Hãy tìm số hạng đầu và công bội của cấp số đó.

c) Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,271271...dưới dạng phân số.

5. Tìm giới hạn của dãy số (u_n):

a) $u_n = \left(\sqrt{2n+3} - \sqrt{n+1}\right)$; b) $u_n = 2^n - 3^n$; c) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}$

6. Cho dãy $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{u_{n-1}}$ với $u_0 = 1$;

a) Chứng minh dãy (u_n) không có giới hạn hữu hạn.

b) Chứng minh $\lim u_n = +\infty$.

7. Cho 2 số a và b thoả mãn $0 < a < b$. Xét 2 dãy số:

$u_n = \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}$ và $v_n = \dfrac{1}{2}(u_{n-1} + v_{n-1})$ với $u_0 = a$; $v_0 = b$

Chứng minh 2 dãy số này có giới hạn và các giới hạn đó bằng nhau .

8. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây:

a) $\lim \dfrac{\sqrt{n^4 - 2n + 3}}{-2n^2 + 3}$ là:

A) $\dfrac{1}{2}$; B) $-\dfrac{1}{2}$; C) $\dfrac{1}{4}$; D) $-\dfrac{1}{4}$

b) $\lim \dfrac{n\sqrt[3]{n^3+1}+n\sqrt{n}}{1-3n\sqrt{n^2+1}}$ là:

A) $-\dfrac{1}{3}$; B) $\dfrac{1}{3}$; C) $\dfrac{1}{2}$; D) $-\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2+1}\right)$ là:

A) $\dfrac{1}{4}$; B) $-\dfrac{1}{4}$; C) $\dfrac{1}{2}$; D) $-\dfrac{1}{2}$

d) $\lim \dfrac{2.1^2+3.2^2+...+(n+1)n^2}{n^4}$ là:

A) $\dfrac{1}{4}$; B) $-\dfrac{1}{4}$; C) 4; D) -4

9. Cho dãy (u_n) xác định bởi công thức :

$$u_n>0;\ u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{1}{u_n}\right)\quad n=0, 1, 2,....$$

Chứng minh rằng $\lim u_n = 1$.

10. Cho dãy (u_n) xác định bởi công thức :

$$u_1=\text{a};\ u_2=\text{b};\ u_n=\frac{u_{n-1}+u_{n-2}}{2},\ \text{n} = 3, 4, 5, 6...$$

Hãy tìm $\lim u_n$?

II. GIỚI HẠN HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1.Giới hạn hàm số tại một điểm

a) Giới hạn hữu hạn

Giả sử f(x) là một hàm số xác định trong khoảng (a; b), có thể không xác định tại điểm $x_0 \in$ (a; b).

- Ta nói hàm f(x) có giới hạn hữu hạn $L \in \mathbb{R}$ khi x dần đến x_0 (hoặc tại x_0) nếu với mọi dãy $(x_n) \in (a;\ b)\setminus\{x_0\}$ (tức $x_n \in$ (a; b) và $x_n \neq x_0$ $\forall$ n) mà $\lim x_n = x_0$ thì $\lim f(x_n) = L$. Khi đó ta viết: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ hoặc $\lim f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

- Chú ý là giới hạn của hàm số, nếu tồn tại bao giờ cũng duy nhất.
- Từ định nghĩa này, để chứng minh không có giới hạn, cần phải chỉ ra hai dãy x_n và y_n cùng dần đến x_0 nhưng $\lim f(x_n)$ và $\lim f(y_n)$ khác nhau.

b) Giới hạn vô cực

Ta viết $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ nếu mọi dãy $(x_n) \in (a;\ b)\setminus\{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$ thì $\lim f(x_n) = +\infty$. Tương tự có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

2. Giới hạn của hàm số tại vô cực

Giả sử f(x) xác định trong khoảng (a; $+\infty$). Ta nói f(x) có giới hạn hữu hạn

$L \in \mathbb{R}$ khi x dần đến $+\infty$ nếu mọi dãy $(x_n) \in (a;\ +\infty)$

(tức $x_n > a$ $\forall$ n) mà $\lim x_n = +\infty$ thì $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to +\infty$.

Tương tự ta cũng có các định nghĩa của $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$= L$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Một vài giới hạn thường gặp: Với k là số nguyên dương bất kỳ, ta luôn có:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^k}=0,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^k}=0,\ \lim_{x\to+\infty}x^k=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}x^k=\begin{cases}+\infty & \text{k chẵn}\\ -\infty & \text{k lẻ}\end{cases}$$

3. Một số định lý về giới hạn hữu hạn

a) Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$ trong đó L, M hữu hạn, x_0 có thể hữu hạn hoặc vô hạn.

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$, $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = cL$ (c là hằng số)

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L \pm M$

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x).\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L.M$

(iv) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ với $M \neq 0$

(v) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right| = |L|$

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}\ ;\ \lim_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L} \text{ với } f(x) \geq 0.$$

b) Nguyên lí kẹp

Cho 3 hàm số f(x), g(x) và h(x) xác định trong khoảng (a;b) chứa x_0, có thể không xác định tại x_0.

Nếu hàm $f(x) \leq h(x) \leq g(x)\ \forall\, x \in (a;\, b) \setminus \{x_0\}$ và

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$.

4. Giới hạn một phía

a) *Giới hạn phải*: Cho f(x) xác định trong khoảng $(x_0;\, b)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Ta nói hàm số f(x) có giới hạn phải là $L \in \mathbb{R}$ khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số $(x_n) \in (x_0;\, b)$ mà $\lim x_n = x_0$ thì $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết : $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^+$

b) *Giới hạn trái*: Hàm f(x) xác định trong khoảng $(a;\, x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, được gọi là có giới hạn trái là L khi x dần đến x_0 nếu với mọi dãy $(x_n) \in (a;\, x_0)$ mà $\lim x_n = x_0$ thì $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^-$

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

5 . Hai quy tắc tìm giới hạn vô cực của hàm tích và thương

Quy tắc 1	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x)$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$	$+\infty$	$L > 0$	$+\infty$
	$+\infty$	$L < 0$	$-\infty$
	$-\infty$	$L > 0$	$-\infty$
	$-\infty$	$L < 0$	$+\infty$
Quy tắc 2	Dấu của L	Dấu của g(x)	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ và $g(x) \neq 0\ \forall\, x \neq x_0$	+	+	$+\infty$
	+	−	$-\infty$
	−	+	$-\infty$
	−	−	$+\infty$

6. Các dạng vô định

a) Dạng $\dfrac{0}{0}$.

Xét $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ với $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. x_0 hữu hạn hoặc $\pm\infty$.

Phương pháp chung ở đây là phân tích f(x) và g(x) sao cho khử được nhân tử chung để đưa về dạng xác định, hoặc đưa về dạng giới hạn cơ bản quen thuộc đã biết cách giải.

b) Dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$. Xét $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ với $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, x_0 hữu hạn hoặc $\pm\infty$

Phương pháp chung là chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa bậc cao nhất của x có mặt ở phân thức đó để đưa về dạng cơ bản đã biết.

c) Dạng $\infty - \infty$.

Xét $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ với $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

Phương pháp chung là nhân liên hợp để đưa về các dạng đã biết.

d) Dạng $0^\infty, 1^\infty, \infty^0$: Phương pháp chung là biến đổi để dùng được các giới hạn đã biết liên quan đến số e hoặc dùng được nguyên lí kẹp.

e) Người ta tìm được các giới hạn quan trọng:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1;\quad \lim_{f(x)\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1;\quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e;\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e;$$

$$\lim_{p(x)\to+\infty}\left(1+\frac{1}{p(x)}\right)^{p(x)} = e;\quad \lim_{q(x)\to 0}(1+q(x))^{\frac{1}{q(x)}} = e,$$ trong đó p(x), q(x) là các hàm số của biến số x.

B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1: Dùng định nghĩa, chứng minh rằng:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$;

c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5}{(x-2)^2} = +\infty$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2} = 0$

Giải : a) Với mọi dãy x_n ($x_n \neq 1$) mà $x_n \to 3$

thì $\lim\frac{1}{x_n-1} = \frac{1}{\lim x_n - 1} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$ nên $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}$.

b) Với mọi dãy $x_n \to 0$ ($x_n \neq 0$) ta luôn có $\left|x_n\cos\frac{1}{x_n}\right| \le |x_n|$.

Do đó $\lim x_n\cos\frac{1}{x_n} = 0$ tức là ta có: $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$

c) Với mọi dãy x_n ($x_n \neq 0$) mà $x_n \to 2$ ta đều có:

$\lim\frac{5}{(x_n-2)^2} = \frac{5}{(\lim x_n - 2)^2} = +\infty$. Do đó: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5}{(x-2)^2} = +\infty$.

d) Với mọi dãy x_n mà $x_n \to +\infty$ thì $\lim\frac{1}{x_n-2} = \lim\frac{\frac{1}{x_n}}{1-\frac{2}{x_n}} = \frac{0}{1-0} = 0$

nên $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2} = 0$.

Ví dụ 2: Chứng minh $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ không tồn tại.

Giải: Chọn 2 dãy (x_n) và (y_n) như sau:

$x_n = 2n\pi \to +\infty$ và $f(x_n) = \cos(2n\pi) \to 1$

$y_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \to +\infty$ và $f(y_n) = \cos(\frac{\pi}{2} + n\pi) \to 0$

Do đó không tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$.

Ví dụ 3: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3 - 2x^2 + x - 4)$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-5}{x^2+2x-1}$; c) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+6}-2}{x^2-x-6}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$

Giải: a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3 - 2x^2 + x - 4) = \lim\limits_{x\to 2} x^3 - 2\lim\limits_{x\to 2} x^2 + \lim\limits_{x\to 2} x - \lim\limits_{x\to 2} 4$

$= 8 - 8 + 2 - 4 = -2$

b) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-5}{x^2+2x-1} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 1} x + 8} - \lim\limits_{x\to 1} 5}{\lim\limits_{x\to 1} x^2 + 2\lim\limits_{x\to 1} x - \lim\limits_{x\to 1} 1} = \frac{\sqrt{1+8}-5}{1+2-1} = -1$$

c) $$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+6}-2}{x^2-x-6} = \lim_{x\to -2}\frac{x+6-4}{(\sqrt{x+6}+2)(x+2)(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{1}{(\sqrt{x+6}+2)(x-3)} = -\frac{1}{20}$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}$

Ta có: $\forall x\neq 0\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leq\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|x|}\leq\dfrac{\sin x}{x}\leq\dfrac{1}{|x|}$ nên $\dfrac{\sin x}{x}\to 0$ khi x→ ∞

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\dfrac{1-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}}{1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}}=1$

e) $\forall x\neq 0$, ta có $0\leq\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leq|x|$. Do đó khi $x\to 0$ thì $x\sin\dfrac{1}{x}\to 0$

f) Biến đổi $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}\frac{\sin 2x}{2x}2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}2}=e^2$ (vì $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}=e$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=1$)

Ví dụ 5: Tìm giới hạn phải, trái và giới hạn của hàm số:

a) $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{với } x<0\\ 0 & \text{với } x=0\\ 1 & \text{với } x>0\end{cases}$ tại điểm $x_0=0$

b) $f(x)=\begin{cases}x^3 & \text{với } x<-1\\ 3x^2-4 & \text{với } x\geq-1\end{cases}$ tại điểm $x_0=-1$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ tại điểm $x_0=3$.

Giải: a) Ta có $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$ và $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$;

b) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^3=(-1)^3=-1$; $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(3x^2-4)=-1$.

Ta suy ra $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=-1$.

c) $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{x-3}=+\infty$.

Do đó không tồn tại $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$.

Ví dụ 6: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\cos x}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^6-3x}}{2x^2+1}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})$

Giải: a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^2-\cos^2 x}{(\sqrt{1+x^2}+\cos x)x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\sin^2 x}{(\sqrt{1+x^2}+\cos x)x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+\cos x}.\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\right)=\dfrac{1}{2}.2=1$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^6-3x}}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^6(1-\frac{3}{x^5})}}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3\sqrt{1-\frac{3}{x^5}}}{2x^2+1}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1-\frac{3}{x^5}}}{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}=+\infty$ (do tử số có giới hạn –1 còn mẫu số âm và có giới hạn 0 (xem quy tắc 2))

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x)}+\sqrt{x})}=0$

C. ĐỀ BÀI TẬP

11. Dùng định nghĩa tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x+8}{x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+1}{2x-1}$

12. Dùng định nghĩa chứng minh không tồn tại các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{1}{x-1}$

13. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^4+3x-1}{2x^2-1}}$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x-1}\right)^{2x}$ d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-nx+n-1}{(x-1)^2}$ (n nguyên dương)

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}$ với n nguyên dương và a khác 0

14. Tính các giới hạn một phía :

a) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x^2+5x-3}{(x-3)^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|}{x-2}$; c) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}}$

d) $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}}$; e) $\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{3x^2-5}{x-4}$

15. Tính các giới hạn một phía và giới hạn của hàm số f(x)

a) $f(x)=\begin{cases}2|x|-1 & \text{với } x\le -2\\ \sqrt{2x^2+1} & \text{với } x>-2\end{cases}$ tại điểm $x_0=-2$

b) $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & \text{với } x\le 2\\ 4x-3 & \text{với } x>2\end{cases}$ tại điểm $x_0=2$

16. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2-7x+12}}{3|x|-17}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+1}-1}{x^2+x}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-x^2}-1}{x^2-x}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^3+x}}$; e) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$; f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-x\right)$

17. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+2x}$; b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$

18. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{x^4+1}{x^2+4x+3}$; b) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{\sqrt{8+2x}-2}{\sqrt{x+2}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{(x-2)^2}\sqrt{\dfrac{x+4}{4-x}}$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4+x^2})$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt[3]{x^3+5}-x)$; f) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{2x^4+3x+1}{x^2-x+2}}$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$; h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{5x^2+1}}{2x}$

19. Hãy tìm kết quả đúng trong các kết quả sau:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ là:

A) 1; B) – 1; C) $\dfrac{1}{2}$; D) $-\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x+a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ là:

A) $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$; B) $-\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$; C) $\dfrac{1}{2a}$; D) $-\dfrac{1}{2a}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$ là:

A) $\dfrac{1}{4}$; B) $-\dfrac{1}{4}$; C) $\dfrac{1}{2}$; D) $-\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-3x^5+7x^3-11}{x^5+x^4-3x}$ là:

A) 0; B) – 3; C) 3; D) $-\infty$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^5+x^4-3}{3x^2-7}$ là:

A) $-\infty$; B) $-\dfrac{2}{3}$; C) 0; D) $+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\dfrac{1}{x}}$ là :

A) $+\infty$; B) $-\infty$; C) 0; D) 1

g) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$ ([ ] : phần nguyên) là :

A) 0; B) 1; C) $-\infty$; D) $+\infty$

III. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Hàm số liên tục tại một điểm

a) Hàm số f(x) xác định trong khoảng (a; b) được gọi là liên tục tại điểm $x_0 \in (a; b)$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Từ định nghĩa này suy ra nếu f(x) liên tục tại x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$.

b) Hàm số không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại x_0. Như vậy, x_0 là điểm gián đoạn của f(x) nếu hoặc x_0 không thuộc tập xác định của f(x), hoặc $x_0 \in (a; b)$ nhưng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ hoặc không tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

c) Hàm số f(x) được gọi là liên tục trái tại $x_0 \in (a; b)$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Tương tự f(x) liên tục phải tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Rõ ràng f(x) liên tục tại x_0 nếu nó liên tục trái và liên tục phải tại x_0 tức là

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Đây là đẳng thức được dùng để xét tính liên tục của f(x) tại x_0.

2. Hàm số liên tục trong một khoảng, trên một đoạn

a) Hàm f(x) được gọi là liên tục trong khoảng (a; b) nếu nó liên tục tại mọi điểm của (a; b).

b) Hàm f(x) được gọi là liên tục trên đoạn [a; b] nếu nó liên tục trong (a; b) và liên tục phải tại a, liên tục trái tại b.

3. Các phép toán và định lý về hàm liên tục

a) Tổng, hiệu, tích, thương (với mẫu số $\neq 0$) của các hàm số liên tục là hàm số liên tục.

b) Các hàm số là đa thức, phân thức hữu tỉ (trừ các điểm làm cho mẫu số bằng 0), hàm số lượng giác, v.v... , là hàm liên tục trên tập xác định của chúng.

c) Giả sử f(x) liên tục trên [a; b] và nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa f(a) và f(b) đều có ít nhất một điểm $c \in [a; b]$ để f(c) = M.

d) Nếu f(x) liên tục trên đoạn [a; b] và f(a).f(b) < 0 thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ để f(c) = 0. Đây là một trong những tính chất quan trọng của hàm số f(x) liên tục được dùng để chứng minh phương trình f(x) = 0 có nghiệm trong khoảng (a; b)

B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1: Xét tính liên tục tại $x_0 = 1$ của các hàm số sau :

a) $f(x) = 2x^2 + 1$; b) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{với } x \le 1 \\ x-1 & \text{với } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{với } x \neq 1 \\ 3 & \text{với } x = 1 \end{cases}$

Giải: a) Tính $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+1) = \lim\limits_{x\to 1} 2x^2 + \lim\limits_{x\to 1} 1 = 2 + 1 = 3 = f(1)$

Do đó $f(x) = 2x^2 + 1$ liên tục tại $x_0 = 1$ (hàm này liên tục tại mọi điểm của R)

b) Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1) = 2 = f(1)$ (tức là f(x) liên tục trái tại $x_0 = 1$)

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x-1) = 0 \neq f(1)$. Do đó f(x) gián đoạn tại $x_0 = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2(x-1)+2(x-1)}{x-1} = 3 = f(1)$

Vì vậy f(x) liên tục tại x = 1

Ví dụ 2: Xét tính liên tục của hàm f(x) tại điểm $x_0 = 0$

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2+|x|}{x} & \text{với } x\neq 0\\ 1 & \text{với } x=0\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|+\sin x}{x} & \text{với } x\neq 0\\ 2 & \text{với } x=0\end{cases}$

Giải: a) Ta có $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3x^2+|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3x^2+x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}(3x+1)=1=f(0)$ nên f(x) liên tục phải tại x_0.

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{3x^2+|x|}{x}=\lim_{x\to0}\frac{3x^2-x}{x}=\lim_{x\to0}(3x-1)=-1\neq f(0)$$

Do đó f(x) không liên tục tại $x_0 = 0$.

b) Ta có $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|x|+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+\sin x}{x}=2=f(0)$ nên f(x) liên tục phải tại $x_0= 0$.

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|+\sin x}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x+\sin x}{x}=-1+1=0\neq f(0)$$

Do đó f(x) không liên tục tại $x_0 = 0$.

Ví dụ 3: Chứng minh hàm số sau liên tục trên toàn trục số

$$f(x)=\begin{cases}x\cos\dfrac{1}{x^2} & \text{với } x\neq 0\\ 0 & \text{với } x=0\end{cases}$$

Giải : Ta có hàm f(x) liên tục tại mọi điểm $x_0\neq 0$

Bây giờ xét tại $x_0 = 0$. Ta có

$\left|x\cos\dfrac{1}{x^2}\right|=|x|\left|\cos\dfrac{1}{x^2}\right|\le|x|$. Vì vậy $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$. Do đó f(x) liên tục tại mọi điểm $x\in R$.

Ví dụ 4: Xét tính liên tục của hàm số sau trên trục số

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x & \text{với } x<1\\ ax+1 & \text{với } x\ge 1\end{cases}\quad \text{(a là số bất kì)}$$

Giải: Trước hết ta thấy f(x) liên tục tại mọi điểm x ≠ 1 với mọi a.

Xét tại $x_0 = 1$. Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(ax+1)=a+1$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1^-}(x^2+x)=2$$

Nếu a = 1 thì $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=2=f(1)$ nên f(x) liên tục tại x = 1

Vì vậy f(x) liên tục trên toàn trục số ℝ.

Nếu a ≠ 1 thì $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\neq f(1)$ nên f(x) gián đoạn tại x = 1 tức là hàm số f(x) liên tục trong tập $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ và gián đoạn tại x = 1.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng phương trình $x^2\cos x + x\sin x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $(0;\pi)$.

Giải: Đặt $f(x) = x^2\cos x + x\sin x + 1$ thì f(x) liên tục trên ℝ đồng thời f(0) = 1 và $f(\pi)=-\pi^2+1$

Ta có $f(0).f(\pi)=1.(-\pi^2+1)=-\pi^2+1<0$. Do đó f(x) = 0 có ít nhất 1 nghiệm trong $(0;\pi)$.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng với mọi m, phương trình $x^3 + mx^2 - 1 = 0$ luôn có một nghiệm dương.

Giải: Xét $f(x) = x^3 + mx^2 - 1$ thì f(x) liên tục trên ℝ và có $f(0)=-1<0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ nên tồn tại c > 0 để f(c) > 0.

Vì vậy f(0). f(c) < 0. Do đó phương trình f(x) = 0 luôn có ít nhất một nghiệm trong (0; c). Vì c > 0 nên nghiệm đó dương.

C. ĐỀ BÀI TẬP

20. Chứng minh rằng các hàm số sau liên tục trên toàn R:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{với } x\neq 2\\ 1 & \text{với } x=2\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\cos x}{(x-\pi)^2} & \text{với } x\neq\pi\\ \dfrac{1}{2} & \text{với } x=\pi\end{cases}$

21. Cho hàm $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{với } x\ge 2\\ 3x+a & \text{với } x<2\end{cases}$

Tìm a để f(x) liên tục tại mọi điểm của $\mathbb{R}$.

22. Chứng minh rằng:

a) Hàm số $f(x)=\sqrt{9-3x^2}$ liên tục trên $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$

b) Hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ liên tục trong (– 2; 2)

c) Hàm số $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{2-x}$ liên tục trên tập xác định của f(x).

23. Chứng minh rằng:

a) Với mọi m, phương trình $(\sqrt{x-1})^3+mx=m+1$ luôn có một nghiệm lớn hơn 1

b) Với m > 0 và a, b, c là 3 số thực bất kỳ thoả mãn

$\dfrac{a}{m+2}+\dfrac{b}{m+1}+\dfrac{c}{m}=0$, thì phương trình $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm dương.

Chương V. ĐẠO HÀM

I. ĐẠO HÀM VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Đạo hàm của hàm số tại một điểm.

Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a; b) và $x_0\in(a;b)$. Đạo hàm của hàm số y = f(x) tại điểm x_0, ký hiệu là $f'(x_0)$ (hay $y'(x_0)$) là giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số giữa số gia Δy của hàm số y và số gia Δx của biến số x tại điểm x_0 khi số gia Δx dần đến 0, tức là :

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

(số gia Δx của biến số x tại điểm x_0 là một số sao cho $x_0+\Delta x\in(a;b)$; số gia Δy của hàm số y tại điểm x_0 ứng với số gia Δx là $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$)

⇔ Để tính đạo hàm của hàm số y = f(x) tại điểm x_0 theo định nghĩa trên, cần phải thực hiện hai bước sau:

Bước 1: Tính $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

Bước 2: Tìm giới hạn $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

⇔ Để chứng minh hàm số y = f(x) không có đạo hàm tại điểm x_0, cần phải chỉ ra hoặc không tồn tại $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ($\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\neq\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$) hoặc giới hạn này là vô cực.

Nếu đặt $x=x_0+\Delta x$ thì $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ và khi $\Delta x\to 0$ thì $x\to x_0$. Do đó :

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Từ đây suy ra nếu hàm số y = f(x) có đạo hàm tại điểm x_0 thì

$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0).0=0$ hay

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, tức là f(x) liên tục tại x_0. Điều ngược lại không đúng (xem ví dụ 4).

2. Đạo hàm của hàm số trên một khoảng

• Giả sử J là một khoảng nào đó (J có thể là đoạn hoặc là hợp của các khoảng, đoạn).

Hàm số y = f(x) được gọi là có đạo hàm trên J nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm $x_0\in J$. Khi đó xác định được một hàm số trên J gọi là đạo hàm của hàm số y = f(x) và được ký hiệu f'(x) hay y'.

• Đạo hàm của một số hàm số thường gặp:

Nếu f(x) = c (c là hằng số) thì f'(x) = 0

Nếu f(x) = x thì f'(x) = 1

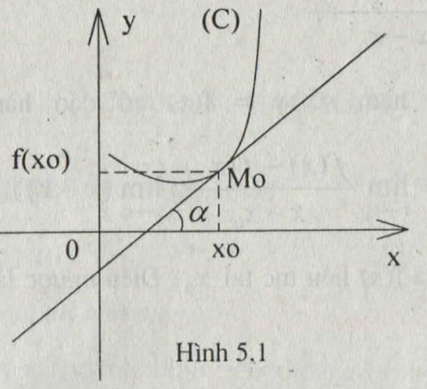
Nếu $f(x) = x^n$ ($n \in N$, $n \geq 2$) thì $f'(x) = nx^{n-1}$

Nếu $f(x) = x^{\alpha}$ (α là số bất kỳ) thì $f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$

Trường hợp $\alpha = \frac{1}{2}$ thì $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm $f'(x_0)$ tại điểm x_0. Ký hiệu (C) là đồ thị của hàm số f(x) và điểm $M_0(x_0; f(x_0)) \in (C)$. Khi đó đạo hàm của hàm số y = f(x) tại điểm x_0 là hệ số góc $\tan\alpha$ của góc α tạo bởi tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ với trục hoành (M_0 được gọi là tiếp điểm của tiếp tuyến), tức là $f'(x_0) = \tan\alpha$.



Hình 5.1

Đồng thời phương trình tiếp tuyến của đồ thị y = f(x) tại tiếp điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Đây là ý nghĩa hình học của đạo hàm và là kiến thức cơ bản, quan trọng của giải tích thường được đề cập trong các đề thi tốt nghiệp THPT và thi đại học.

4. Ý nghĩa vật lí của đạo hàm.

Vận tốc tức thời tại thời điểm t_0 (hay còn gọi là vận tốc tại thời điểm t_0) kí hiệu là $v(t_0)$) của một chất điểm chuyển động với phương trình s = s(t) là đạo hàm của hàm số s = s(t) tại điểm t_0, tức là $v(t_0) = s'(t_0)$. (Tỷ số $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ được gọi là vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian Δt từ thời điểm t_0 đến thời điểm $t_0 + \Delta t$)

Cường độ tức thời tại thời điểm t_0 (hay còn gọi là cường độ tại thời điểm t_0) ký hiệu là $i(t_0)$) của một dòng điện với điện lượng q = q(t) là đạo hàm của hàm số q = q(t) tại điểm t_0 tức là: $i(t_0) = q'(t_0)$. (Tỷ số $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ được gọi là cường độ trung bình của dòng điện trong khoảng thời gian Δt từ thời điểm t_0 đến thời điểm $t_0 + \Delta t$

Đây là ý nghĩa vật lí của đạo hàm.

B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1: Dùng định nghĩa tính đạo hàm của các hàm số sau :

$y = 3x + 1$ tại điểm $x_0 = 1$

$y = 2x^2 - x + 3$ tại điểm $x_0 = 2$

$y = ax^2 + bx + c$ tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ (a, b, c là các hằng số)

$y = \sqrt{5 - x}$ tại mọi điểm $x < 5$

Giải: a) Ta thực hiện 2 bước tính đạo hàm của hàm y = 3x + 1 tại điểm $x_0 = 1$ như sau:

Tính $\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1) = 3(1 + \Delta x) + 1 - (3.1 + 1)$

$$= 3 + 3\Delta x + 1 - 4 = 3\Delta x$$

Tính $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3$. Vậy y'(1) = 3.

b) Tính $\Delta y = 2(2 + \Delta x)^2 - (2 + \Delta x) + 3 - (2.2^2 - 2 + 3)$

$$= 2(4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2) - 2 - \Delta x + 3 - 9$$

$$= 8 + 8\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2 - \Delta x + 3 - 9$$

$$= 2(\Delta x)^2 + 7\Delta x$$

Tính $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(\Delta x)^2+7\Delta x}{\Delta x} = 7$. Vậy y'(2) = 7

c) Ta thực hiện 2 bước tính đạo hàm tại điểm $x\in\mathbb{R}$ bất kỳ như sau:

Tính $\Delta y = a(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x) + c - ax^2 - bx - c$

$= ax^2 + 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 + bx + b\Delta x - ax^2 - bx$

$= a(\Delta x)^2 + (2ax+b)\Delta x$

Tính $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a(\Delta x)^2+(2ax+b)\Delta x}{\Delta x} = 2ax + b$

Vậy f'(x) = 2ax + b với mọi $x\in\mathbb{R}$.

d) $\forall x < 5$ thì $\Delta y = \sqrt{5-(x+\Delta x)} - \sqrt{5-x} = \sqrt{5-x-\Delta x} - \sqrt{5-x}$

Tính $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{5-x-\Delta x}-\sqrt{5-x}}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{5-x-\Delta x-5+x}{\Delta x\left(\sqrt{5-x-\Delta x}+\sqrt{5-x}\right)} = -\frac{1}{2\sqrt{5-x}}$$

Vậy $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{5-x}}$

Ví dụ 2 : Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$, biết:

a) Tiếp điểm có hoành độ bằng – 1

b) Tiếp điểm có tung độ bằng 27

c) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3

d) Tiếp tuyến đi qua điểm A (0; – 2)

Giải: Ta đã biết $y = x^3$ thì $y' = 3x^2$

a) Với $x_0 = -1$ thì $f'(x_0) = 3$ và f(– 1) = – 1

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là :

y = 3(x – (– 1)) + (– 1) = 3x + 3 – 1 hay y = 3x + 2

b) Gọi x_0 là hoành độ của tiếp điểm ứng với tung độ bằng 27 tức là

$f(x_0) = x_0^3 = 27$. Từ đây suy ra $x_0 = 3$.

Ta có : $f'(x_0) = 3.3^2 = 27$ và $f(x_0) = 27$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là :

y = 27(x – 3) + 27 hay y = 27x – 54

c) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3 tức là $3x^2 = 3$ nên có 2 tiếp điểm với hoành độ là

$x_0 = 1$ và $x_1 = -1$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là y = 3(x – 1) + 1 hay

y = 3x – 2

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_1 = -1$ là y = 3x + 2

d) Gọi x_0 là hoành độ của tiếp điểm có tiếp tuyến đi qua điểm A(0; – 2). Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(x_0; f(x_0))$ là

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$= 3x_0^2\ (x - x_0) + x_0^3 = 3x\,x_0^2 - 3x_0^3 + x_0^3 \text{ hay } y = 3x_0^2\ x - 2x_0^3 .$$

Tiếp tuyến đi qua A(0; – 2) nên

$3x_0^2\ .0 - 2x_0^3 = -2$ hay $2x_0^3 = 2$. Ta suy ra $x_0 = 1$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là :

$y = 3.1^2.x - 2.1^3$ hay y = 3x – 2

Ví dụ 3: a) Một vật rơi tự do với phương trình chuyển động là $s = \frac{1}{2}gt^2$ trong đó g là gia tốc rơi tự do bằng $9{,}8\text{m/s}^2$. Tìm vận tốc của chuyển động tại thời điểm $t_0 = 3$ giây (s).

b) Điện lượng truyền trong một dây dẫn được cho bởi hàm số q = 4t + 5. Tính cường độ tại thời điểm $t_0 = 5$ giây (s).

Giải: a) Ta có vận tốc v(t) = s'(t) = gt = 9,8.t. Do đó v(3) = 9,8.3 = 29,4m/s

Ta có i(t) = q'(t) = 4. Do đó cường độ dòng điện tại thời điểm $t_0 = 5$s là i(5) = 4 Ampe.

Ví dụ 4 : Chứng minh hàm số $y = |x|$ liên tục tại mọi điểm $x\in\mathbb{R}$, có đạo hàm tại mọi điểm $x\in\mathbb{R}$ trừ điểm x = 0.

Giải: Ta viết $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{với } x \ge 0 \\ -x & \text{với } x < 0 \end{cases}$

Ta thấy hàm f(x) liên tục tại mọi điểm $x \neq 0$. Xét tại x = 0 ta có:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0;\ \ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$$

nên $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ tức là f(x) liên tục tại x = 0 hay $f(x) = |x|$ liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

Hàm số $f(x) = |x|$ có đạo hàm tại mọi điểm $x \neq 0$.

Xét tại $x_0 = 0$, ta có:

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|$, nên không tồn tại $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

vì $\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$ và $\lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$

Do đó hàm số $f(x) = |x|$ không có đạo hàm tại điểm x = 0. Ví dụ này chứng tỏ hàm số liên tục tại x_0 nhưng chưa chắc có đạo hàm tại điểm x_0 (xem thêm bài tập 5c. ở mục II của chương này)

C. ĐỀ BÀI TẬP

1. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = 3x^2 - 4x$ tại điểm $x_0 = 2$; b) $y = \frac{1}{3x-1}$ tại các điểm $x \neq \frac{1}{3}$

c) $y = \sqrt{6-2x}$ tại các điểm x < 3

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4$, biết

a) Tiếp điểm có hoành độ bằng – 1

b) Tiếp điểm có tung độ bằng 16

c) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 4

d) Tiếp tuyến song song với đường thẳng y =108x

e) Tiếp tuyến đi qua điểm A(0; – 192)

3. Chứng minh nếu tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ của đồ thị hàm số y = f(x) song song với trục hoành thì $f'(x_0) = 0$. Điều ngược lại không đúng.

4. Cho biết phương trình chuyển động của một vật thể là $s = at^2$ (a là hằng số). Tìm vận tốc của vật thể tại thời điểm $t_0 = 5$s

II. CÁC QUY TẮC VÀ CÔNG THỨC TÍNH ĐẠO HÀM

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích và thương các hàm số

Giả sử u = u(x), v = v(x), w = w(x) là các hàm số có đạo hàm trên một khoảng J nào đó. Khi đó

$(u + v)' = u' + v'$; $(u - v)' = u' - v'$; $(u \pm v \pm w)' = u' \pm v' \pm w'$

$(ku)' = ku'$ (k là hằng số);

$(uv)' = u'v + uv'$; $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ với } v(x) \neq 0 \text{ trên J}$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \text{ với } v(x) \neq 0 \text{ trên J.}$$

2. Đạo hàm của hàm số hợp

Cho hàm số u = u(x) và hàm số y = f(u). Khi đó hàm số y = f(u(x)) = F(x) được gọi là hàm số hợp của biến số x qua hàm số trung gian u.

(i) Nếu hàm số u = u(x) có đạo hàm tại điểm x_0 và hàm số y = f(u) có đạo hàm tại điểm $u_0 = u(x_0)$ thì hàm số hợp y = f(u(x)) = F(x) có đạo hàm tại điểm x_0 và $F'(x_0) = f'(u_0).u'(x_0)$.

(ii) Nếu x_0 bất kỳ thuộc J thì hàm số hợp y = f(u(x)) = F(x) có đạo hàm trên J và F'(x) = f'(u(x)).u'(x). Ta có:

$[u^n(x)]' = n.u^{n-1}(x).u'(x) \quad \forall n \geq 1$; $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}.u'(x).$

3. Đạo hàm của các hàm số lượng giác

$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u.u'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u.u'$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi)$	$(\tan u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}.u'$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $(x \neq k\pi)$	$(\cot u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}.u'$

B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x + 4$

b) $y = \dfrac{1}{5}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 + 0{,}7x^2 - 3$

c) $y = 3x^4(2x - 1)(4x^2 + 7)$

d) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{2x - 3}$

e) $y = \left(\dfrac{3x + 4}{5x - 1}\right)^{10}$

f) $y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{\sqrt{x^2 - x - 1}}$

Giải: Ta áp dụng các quy tắc tính đạo hàm để tìm đạo hàm của các hàm số đã cho.

a) $y' = (3x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x + 4)' = (3x^5)' + (2x^4)' - (3x^3)' + (x)' + (4)'$

$= 3.5.x^4 + 2.4.x^3 - 3.3x^2 + 1 + 0$

Vậy $y' = 15x^4 + 8x^3 - 9x^2 + 1$

b) $y' = (\dfrac{1}{5}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 + 0{,}7x^2 - 3)' = (\dfrac{1}{5}x^4)' - (\dfrac{2}{3}x^3)' + (0{,}7x^2)' - (3)'$

$= \dfrac{1}{5}.4.x^3 - \dfrac{2}{3}.3.x^2 + 0{,}7.2x - 0$

Vậy $y' = \dfrac{4}{5}x^3 - 2x^2 + 1{,}4x$

c) $y' = [3x^4(2x - 1)(4x^2 + 7)]'$

$= (3x^4)'(2x - 1)(4x^2 + 7) + 3x^4(2x - 1)'(4x^2 + 7) + 3x^4(2x - 1)(4x^2 + 7)'$

$= 3.4x^3(2x - 1)(4x^2 + 7) + 3x^4.2(4x^2 + 7) + 3x^4(2x - 1).4.2x$

$= (24x^4 - 12x^3)(4x^2 + 7) + 6x^4(4x^2+7) + 24x^5(2x - 1)$

$= (30x^4 - 12x^3)(4x^2 + 7) + 24x^5(2x - 1)$

Vậy $y' = 168x^6 - 72x^5 + 210x^4 - 84x^3$

Nhận xét: Ta có thể viết $y = 24x^7 + 42x^5 - 12x^6 - 21x^4$ và tính được

$y' = 168x^6 - 72x^5 + 210x^4 - 84x^3$

d) $y' = \left(\dfrac{x^2 - x + 1}{2x - 3}\right)' = \dfrac{(x^2 - x + 1)'(2x - 3) - (x^2 - x + 1)(2x - 3)'}{(2x - 3)^2}$

$= \dfrac{(2x - 1)(2x - 3) - (x^2 - x + 1).2}{(2x - 3)^2} = \dfrac{4x^2 - 6x - 2x + 3 - 2x^2 + 2x - 2}{(2x - 3)^2}$

Vậy $y' = \dfrac{2x^2 - 6x + 1}{(2x - 3)^2}$

e) $y' = \left[\left(\dfrac{3x + 4}{5x - 1}\right)^{10}\right]' = 10.\left(\dfrac{3x + 4}{5x - 1}\right)^9.\left(\dfrac{3x + 4}{5x - 1}\right)'$

$= 10.\left(\dfrac{3x + 4}{5x - 1}\right)^9 \dfrac{(3x + 4)'(5x - 1) - (3x + 4)(5x - 1)'}{(5x - 1)^2}$

$= 10.\left(\dfrac{3x + 4}{5x - 1}\right)^9 \dfrac{15x - 3 - 15x - 20}{(5x - 1)^2}$

Vậy $y' = \dfrac{-230(3x + 4)^9}{(5x - 1)^{11}}$

g) $y' = \left(\dfrac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2-x-1}}\right)' = \dfrac{(2x^2+x+1)'\sqrt{x^2-x-1}-(2x^2+x+1)\left(\sqrt{x^2-x-1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2-x-1}\right)^2}$

$$= \frac{(4x+1)\sqrt{x^2-x+1}-(2x^2-x+1)\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-1}}}{(x^2-x-1)}$$

$$= \frac{(8x+2)(x^2-x-1)-(2x^2+x+1)(2x-1)}{2(x^2-x-1)\sqrt{x^2-x-1}}$$

$$= \frac{8x^3-8x^2-8x+2x^2-2x-2-4x^3-2x^2-2x+2x^2+x+1}{2(x^2-x-1)\sqrt{x^2-x-1}}$$

Vậy $y' = \dfrac{4x^3-6x^2-11x-1}{2(x^2-x-x)\sqrt{x^2-x-1}}$

Vı dụ 2: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 3\sin 2x + x\cos^2(3x^2+1)$

b) $y = \sqrt{\sin 3x} - \cos\sqrt{x^2+1}$

c) $y = \sqrt{\cos(x^2+3)} - \sin x\sqrt{\tan(3x^2-4)}$

$y = \cot^3(2x-5) + \tan(4x-3)^2$

Giải: a) $y' = (3\sin 2x + x\cos^2(3x^2+1))' = (3\sin 2x)' + [x\cos^2(3x^2+1)]'$

$$= 3.2.\cos 2x + \cos^2(3x^2+1) - x.2\cos(3x^2+1).\sin(3x^2+1).6x$$

Vậy $y' = 6\cos 2x + \cos^2(3x^2+1) - 6x^2\sin 2(3x^2+1)$

b) $y' = \left[\sqrt{\sin 3x} - \cos\sqrt{x^2+1}\right] = \left(\sqrt{\sin 3x}\right)' - \left(\cos\sqrt{x^2+1}\right)'$

$$= \frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}} + \sin\sqrt{x^2+1}\,.\,\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}.$$

Vậy $y' = \dfrac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\sin\sqrt{x^2+1}$

c) $y' = \left[\sqrt{\cos(x^2+3)} - \sin\sqrt{\tan\left(3x^2-4\right)}\right] = \left(\sqrt{\cos(x^2+3)}\right)' - \left(\sin\sqrt{\tan\left(3x^2-4\right)}\right)'$

$$= -\frac{2x\sin(x^2+3)}{2\sqrt{\cos(x^2+3)}} - \cos x\sqrt{\tan(3x^2-4)} - \frac{\sin x\dfrac{6x}{\cos^2(3x^2-4)}}{2\sqrt{\tan(3x^2-4)}}.$$ Do đó:

$$y' = -\frac{x\sin(x^2+3)}{\sqrt{\cos(x^2+3)}} - \cos x\sqrt{\tan(3x^2-4)} - \frac{3x\sin x}{\cos^2(3x^2-4)\sqrt{\tan(3x^2-4)}}$$

d) $y' = \left[\cot^3(2x-5) + \tan(4x-3)^2\right]' = \left[\cot^3(2x-5)\right]' + \left[\tan(4x-3)^2\right]'$

$$= -3\cot^2(2x-5).\frac{2}{\sin^2(2x-5)} + \frac{2(4x-3).4}{\cos^2(4x-3)^2}$$

Vậy $y' = -\dfrac{6\cos^2(2x-5)}{\sin^4(2x-5)} + \dfrac{8(4x-3)}{\cos^2(4x-3)^2}$

Ví dụ 3: Tính các tổng sau:

a) $S_1 = 1C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots.. + (n+1)C_n^n$

b) $S_2 = nC_n^0 - (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 - (n-3)C_n^3 \ldots.. + (-1)^n C_n^{n-1} + C_n^n$

Giải: a) Ta có: $(1+x)^n = 1C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + \ldots.. + x^nC_n^n$

$$\Rightarrow x(1+x)^n = xC_n^0 + x^2C_n^1 + x^3C_n^2 + \ldots.. + x^{n+1}C_n^n$$

Đạo hàm 2 vế ta được:

$(1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = C_n^0 + 2x\,C_n^1 + 3x^2C_n^2 + \ldots.. + (n+1)x^nC_n^n$

Cho x = 1 ta được:

$2^n + n.2^{n-1} = 1C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots.. + (n+1)C_n^n = S_1 = 2^{n-1}(n+2)$

b) $(x-1)^n = C_n^0x^n - C_n^1x^{n-1} + C_n^2x^{n-2} + \ldots.. + (-1)^nC_n^n.$

Đạo hàm 2 vế được:

$n(x-1)^{n-1} = nC_n^0x^{n-1} - (n-1)C_n^1x^{n-2} + (n-2)C_n^2x^{n-3} + \ldots.. + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}.$

Cho x = 1 ta được:

$n(1-1)^{n-1} = nC_n^0 - (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 + \ldots.. + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} = 0.$

Do đó $S_2 = nC_n^0 - (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 - (n-3)C_n^3 \ldots.. + (-1)^nC_n^{n-1} + C_n^n = 1.$

C. ĐỀ BÀI TẬP

5. Tìm đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = 2x^5 - 4x + 3$ tại $x_0 = 1$;

b) $y = x^6 - 5x^4 + 2x - 3\sqrt{x}$

c) $y = \begin{cases} 2x+1 & \text{với } x \leq 0 \\ 3x^2+1 & \text{với } x > 0 \end{cases}$

d) $y = 3x^4(5x+1)(2x^2 - 3)$

e) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

f) $y = \left(\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}\right)^{20}$

6. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{\sin x + \cos 3x}{\sin x - \cos 3x}$;

b) $y = \sqrt{1 + 3\tan(x^2+1)}$

c) $y = 2\sin 3x.\cos 5x$;

d) $y = \sqrt{\sin 2x} + \cos\sqrt{3x^2 - 2}$

e) $y = x\cot^3(2x^2 - 1)$;

f) $y = x^2.\tan^4(2x - 1) - 5\cot(4x^3+1)$

7. a) Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$. Giải bất phương trình $f'(x) \leq f(x)$

b) Cho hàm số $y = 2\cos^2(4x - 1)$. Chứng minh rằng với mọi x luôn có $|f'(x)| \leq 8$.

Tìm các giá trị x để xảy ra đẳng thức.

8. Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$ và gọi (C) là đồ thị của hàm số. Hãy viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết:

a) Tiếp điểm có hoành độ bằng 1;

b) Tung độ của tiếp điểm bằng 2;

c) Tiếp tuyến song song với trục hoành;

d) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{8}x + 3$

e) Tiếp tuyến đi qua điểm A(0; 6)

9. Tìm một điểm trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x-1}$ sao cho tiếp tuyến tại điểm đó chắn trên các trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 2 (đơn vị diện tích)

10. Giải phương trình y' = 0, biết

a) $y = \sin 2x - 2\sin x + 3$;

b) $y = \cos 2x - 5\cos x$

11. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau:

a) Đạo hàm của hàm số $y = 3x^2 - 4x + 1$ tại điểm $x = -1$ là:

A) 10 ; B) – 8 ; C) – 2 ; D) 2

b) Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{2x^2+1} - x + 3$ tại điểm x = 2 là

A) $\dfrac{2}{3}$; B) $-\dfrac{2}{3}$; C) $\dfrac{1}{3}$; D) $-\dfrac{1}{3}$

c) Cho hàm số $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+8}}$ thì y'(1) là:

A) $\dfrac{17}{9}$; B) $-\dfrac{15}{9}$ C) $\dfrac{17}{27}$; D) $\dfrac{7}{27}$

d) Đối với hàm số $y = (3x^3 - 2x - 1)^2$ thì y'(– 1) là:

A) –30 ; B) – 16 ; C) – 9 ; D) – 28

e) Đạo hàm của hàm $y = \tan^3\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ tại điểm x = 0 là:

A) 27 ; B) 30 ; C) 33 ; D) 36

f) Cho hàm số $y = \cot^2\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ thì y'(0) là:

A) $-4\sqrt{3}$; B) – 12 ; C) – 24 ; D) $-8\sqrt{3}$

12. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau:

a) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ tại điểm M (0 ; 1) có phương trình:

A) y = – x + 1 ; B) y = x – 1 ; C) y = – 1 ; D) y = 1

b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x + 1 - \dfrac{2}{2x-1}$ tại điểm có hoành độ x = 0 là:

A) y = 3x + 3 ; B) y = 4x + 3 ; C) y = 5x + 3 ; D) y = 5x – 3

c) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^2 - 3x + 1$ vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{5}x + 3$ có phương trình là:

A) $y = -5x + 9$; B) $y = 5x - 7$; C) $y = \frac{1}{5}x - 9$; D) $y = -\frac{1}{5} + 9$

d) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ song song với đường thẳng $y = x - 3$ có phương trình là

A) $y = x + 3$; B) $y = -x - 3$; C) $y = x - \frac{5}{6}$; D) $y = x + \frac{7}{6}$

III. VI PHÂN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Khái niệm vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x. Khi đó:

- Vi phân của hàm số $y = f(x)$ ứng với số gia Δx đã cho, ký hiệu là $df(x)$ (hay dy) được xác định là: $df(x) = f'(x).\ \Delta x$
- Với hàm số $f(x) = x$ thì $dx = (x)'\ \Delta x = 1.\ \Delta x = \Delta x$ nên có thể viết vi phân dưới dạng $df(x) = f'(x)dx$ hay $dy = f'(x)dx$

Từ đây có thể viết $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ hay $y' = \frac{dy}{dx}$.

- Một vài quy tắc tính vi phân của hàm số

a) $dc = 0$ với c là hằng số; b) $dcu = cdu$ với c là hằng số

c) $d(u \pm v) = du \pm dv$; d) $duv = vdu + udv$

e) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

- Vi phân của hàm số hợp.

Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm tại điểm x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại điểm $u = u(x)$.

Khi đó vi phân của hàm số hợp $F(x) = f(u(x))$ là $dF = F'(x)dx$.

Nếu kí hiệu f'_u là đạo hàm của hàm số f lấy theo biến số u và f'_x là đạo hàm của hàm số f lấy theo biến số x thì: $df = f'_u.du = f'_x.dx$ (vì $f'_x = f'_u.u'_x$).

2. Ứng dụng của vi phân để tính gần đúng

Nếu tại điểm x_0 có $|\Delta x|$ khá bé thì từ định nghĩa của đạo hàm

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ ta suy ra:}$$

$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$ $(= df(x_0))$ hay $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$

tức là $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

Đây là một công thức tính gần đúng giá trị hàm số rất đơn giản và $|\Delta x|$ càng bé thì kết quả thu được càng chính xác.

B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1: Tính vi phân của các hàm số sau:

a) $f(x) = x\cos x$ tại $x = \frac{\pi}{3}$ ứng với $\Delta x = 0{,}01$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$ tại điểm $x = 0{,}5$ với $\Delta x = 0{,}02$

Giải: a) Trước hết tính $f'(x) = (x\cos x)' = \cos x - x\sin x$.

Do đó: $df\left(\frac{\pi}{3}\right) = f'\left(\frac{\pi}{3}\right).\ \Delta x = (\cos\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3})\ 0{,}01$

$= \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}\right).0{,}01 \approx -0{,}004$ (chính xác đến 10^{-3})

$f'(x) = (\sqrt{x^2 + 3x + 2})' = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x - 2}}$. Do đó:

$df(0{,}5) = f'(0{,}5).\ \Delta x = \frac{2.0{,}5 + 3}{2\sqrt{0{,}5^2 + 3.0{,}5 - 2}}.0{,}02 \approx 0{,}0206$ (chính xác đến 10^{-4}).

Ví dụ 2: Tính vi phân của các hàm số sau:

a) $y = x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 7x + 1$; b) $y = \sqrt{3x^3 + 2x^2 - 4x + 5}$

c) $y = \cos 3x - \tan^2(x^2 + 1)$; d) $y = x\sqrt{\sin 4x + \cos x}$

Giải: a) $dy = (4x^3 - 15x^2 + 6x - 7)dx$

b) $dy = \dfrac{9x^2 + 4x - 4}{2\sqrt{3x^3 + 2x^2 - 4x + 5}}dx$

c) $dy = \left(-3\sin 3x - \dfrac{2\tan(x^2+1).2x}{\cos^2(x^2+1)}\right)dx = -\left(3\sin 3x + \dfrac{4x\sin(x^2+1)}{\cos^3(x^2+1)}\right)dx$

d) $dy = \left(\sqrt{\sin 4x + \cos x} + x.\dfrac{4\cos 4x - \sin x}{2\sqrt{\sin 4x + \cos x}}\right)dx$

Ví dụ 3: Tính gần đúng các giá trị hàm số sau:

a) $\sin 30^0 30'$; b) $\sqrt{0{,}995}$

Giải: a) Đặt $f(x) = \sin x$ thì $f'(x) = \cos x$ (x tính bằng radian)

Đặt $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$ ($= 30^0$) và $\Delta x = \dfrac{\pi}{360}$ $\left(\dfrac{\pi}{360} = 30'\right)$

Khi đó: $f\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{360}\right) \approx f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right).\dfrac{\pi}{360}$ hay

$\sin 30^0 30' = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{360}\right) \approx \sin\dfrac{\pi}{6} + \left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right).\dfrac{\pi}{360} \approx \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\pi}{360}$.

Vậy $\sin 30^0 30' \approx 0{,}507558$

b) Đặt $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Đặt $x_0 = 1$ và $\Delta x = -0{,}005$ thì: $\sqrt{0{,}995} = \sqrt{1 - 0{,}005}$

$= f(1 + (-0{,}005)) \approx f(1) + f'(1).(-0{,}005) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{1}}.(-0{,}005) = 0{,}9975$ (trong khi tính bằng máy tính bỏ túi được $\sqrt{0{,}995} \approx 0{,}997497$).

C. ĐỀ BÀI TẬP.

13. Tính vi phân của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sin 3x$ tại $x = \dfrac{\pi}{3}$ ứng với $\Delta x = 0{,}001$

b) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x - 1$ tại $x = -1$ với $\Delta x = 0{,}002$

c) $f(x) = \sqrt{3\sin x + \cos x}$ tại $x = \dfrac{\pi}{4}$ với $\Delta x = 0{,}001$

14. Tìm vi phân của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$; b) $y = 3x^2 + 2\sin^3 x - \cot(2x^2 + 1)$

c) $y = \tan\left(\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x}{4} + 5\right)$

15. Tính gần đúng các giá trị của các hàm số sau:

a) $\sin 45^0 30'$; b) $\sqrt{1{,}02}$; c) $\dfrac{1}{0{,}9995}$

16. Chứng minh công thức gần đúng:

$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \dfrac{x}{2a}$ (a > 0) trong đó $|x| << a$ (ký hiệu này chỉ ra rằng $|x|$ rất bé so với a). Áp dụng tính gần đúng $\sqrt{5}$; $\sqrt{34}$ và $\sqrt{120}$

17. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau:

a) Vi phân của hàm số $y = \dfrac{2x}{\sqrt{8x^2 + 1}}$ tại điểm $x = 1$ với $\Delta x = 0{,}001$ là

A) 75.10^{-6} ; B) 74.10^{-6} ; C) 76.10^{-6} ; D) 77.10^{-6}

b) Vi phân của hàm số $y = \sin 3x$ tại điểm $x = \dfrac{\pi}{3}$ với $\Delta x = 0{,}0001$ là

A) 0 ; B) 1 ; C) 0,0003 ; D) – 0,0003

c) Vi phân của hàm số $y = \dfrac{1}{(1 + \cot x)^2}$ tại $x = \dfrac{\pi}{6}$ với $\Delta x = \dfrac{\pi}{360}$ là

A) $\dfrac{\pi}{45\left(1 + \sqrt{3}\right)^3}$; B) $\dfrac{\pi}{45\left(3 + \sqrt{3}\right)^3}$; C) $\dfrac{2\pi}{45\left(1 + \sqrt{3}\right)^3}$; D) $\dfrac{2\pi}{45\left(3 + \sqrt{3}\right)^3}$

d) Vi phân của hàm số $y = x + 2\sqrt{x}$ là

A) $\dfrac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\Delta x$; B) $\dfrac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; C) $\dfrac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}dx$; D) $\dfrac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

e) Giá trị gần đúng chính xác đến phần vạn của $\sqrt{0,997}$ là

A) 0,9984 ; B) 0,9985 ; C) 0,9986 ; D) 0,9987

f) Giá trị gần đúng chính xác đến phần vạn của $\cos 61^0$ là

A) 0,4850 ; B) 0,4849 ; C) 0,4848 ; D) 0,4847

g) Giá trị gần đúng chính xác đến phần vạn của $\tan 45^0 30'$ là

A) 1,0120 ; B) 1,0174 ; C) 1,0180 ; D) 1,0185

IV. ĐẠO HÀM CẤP CAO

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Định nghĩa:

- Đạo hàm cấp 2 của hàm số y = f(x), ký hiệu là f''(x) (hay y'') là đạo hàm của đạo hàm f'(x).
- Đạo hàm cấp n ($n \geq 3$, $n \in N$) của hàm số y = f(x), ký hiệu là $f^{(n)}(x)$ (hay $y^{(n)}$) là đạo hàm của đạo hàm cấp (n – 1) của hàm số f(x), tức là: $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$. (Đạo hàm $f^{(3)}(x) = [f''(x)]'$ ký hiệu là f'''(x))

2. Một số quy tắc và công thức tính đạo hàm cấp cao

a) Các quy tắc:

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$

$$(uv)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (u)^{(k)} (v)^{(n-k)} \quad \text{với } u^{(0)} = u;\ v^{(0)} = v;\ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

b) Một vài công thức:

(i) $\left(x^m\right)^{(n)} = m(m-1)...(m-n+1)x^{m-n}$; m là số bất kỳ.

(ii) $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!}{x^{n+1}}$;

(iii) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

(iv) $(\cos x)^n = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$;

(v) $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!}{(1+x)^{n+1}}$ (vi) $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

3. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp 2

- Một chất điểm chuyển động với phương trình s = s(t) thì vận tốc tại s = s(t) thời điểm t_0 là $v(t_0) = s'(t_0)$.
- Nếu t_0 nhận một số gia Δt thì $v(t_0)$ nhận số gia Δv và $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, ký hiệu γ_{tb}, là gia tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian Δt.
- Gia tốc tức thời tại thời điểm t_0 (gia tốc tại thời điểm t_0), ký hiệu $\gamma(t_0)$, của một chất điểm chuyển động với phương trình s = s(t) là:

  $\gamma(t_0) = v'(t_0) = s''(t_0)$.

  Đây là ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp 2.

B. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1: Tính đạo hàm đến cấp đã chỉ ra của các hàm số sau:

a) $f(x) = x^5 - \sin 2x$, $f^{(4)}(x)$; b) $f(x) = \sqrt{2x}$, $f^{(5)}(x)$

c) $f(x) = (3x-7)^9$, $f^{(8)}(x)$; d) $f(x) = \tan^2(3x+1)$, $f''(x)$

Giải: a) $f'(x) = 5x^4 - 2\cos 2x$

$f''(x) = 5.4.x^3 - 2.2(-\sin 2x) = 20x^3 + 4\sin 2x$

$f'''(x) = 60.x^2 + 8\cos 2x$

$f^{(4)}(x) = 120x - 16\sin 2x$

b) $f(x) = \sqrt{2x} = \sqrt{2}\,.\,x^{\frac{1}{2}}$

$$f^{(5)}(x) = \sqrt{2}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{(5)} = \sqrt{2}\,.\,\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}-1\right).\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)\left(\frac{1}{2}-4\right)x^{\frac{1}{2}-5}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}.\sqrt{2}\,.x^{-\frac{9}{2}}$$

Vậy $f^{(5)}(x) = \dfrac{1.3.5.7.\sqrt{2}}{2^5x^4\sqrt{x}} = \dfrac{105\sqrt{2}}{32x^4\sqrt{x}}$

c) $\left[(3x-7)^9\right]^{(8)} = 9.3.8.3.7.3.6.3.5.3.4.3.3.3.2.3(3x-7) = 9!3^8(3x-7)$

d) $f'(x) = \dfrac{2\tan(3x+1).3}{\cos^2(3x+1)} = \dfrac{6\sin(3x+1)}{\cos^3(3x+1)}$

$$f''(x) = \frac{6\cos^4(3x+1).3 + 6\sin(3x+1).3\cos^2(3x+1).3\sin(3x+1)}{\cos^6(3x+1)}$$

$$= \frac{18\cos^2(3x+1) + 54\sin^2(3x+1)}{\cos^4(3x+1)}$$

Vậy $f''(x) = \dfrac{18 + 36\sin^2(3x+1)}{\cos^4(3x+1)}$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm cấp cao của các hàm số sau:

a) $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, $y^{(n)}$; b) $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$, $y^{(n)}$

c) $y = \sin ax$ (a là hằng số) , $y^{(4n)}$; d) $y = \cos^2(x)$, $y^{(2n)}$

Giải: a) $(a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n)^{(n)} = a_0.n!$

b) Viết $\dfrac{1}{x(1-x)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x}$, do đó

$$\left[\frac{1}{x(1-x)}\right]^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{n} + \left(\frac{1}{1-x}\right)^{n} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} + \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

c) $y' = a\cos ax$; $y'' = -a^2\sin ax$; $y''' = -a^3\cos ax$; $y^{(4)} = a^4\sin ax$

$\Rightarrow y^{(4n)} = a^{4n}\sin ax.$

d) Viết $\cos^2x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x \Rightarrow y' = -\dfrac{2}{2}\sin 2x = -\sin 2x$

$y'' = -2\cos 2x$; $y''' = 2^2\sin 2x$; $y^{(4)} = 2^3\cos 2x; .... \Rightarrow y^{(2n)} = (-1)^n 2^{2n-1}\cos 2x$

Ví dụ 3: a) Một chất điểm chuyển động có phương trình là

$$s = A\sin(\omega t + \varphi). \text{ (dao động điều hoà)}$$

Khi đó vận tốc của chuyển động có phương trình là

$$v(t) = s'(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

Do đó gia tốc của chuyển động có phương trình là

$$\gamma(t) = v'(t) = s''(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi)$$

b) Nếu một chất điểm chuyển động với phương trình $s = 4t - 3t^2$ thì gia tốc tại thời điểm $t_0 = 4$ giây(s) là $\gamma(4) = s''(4) = -6$ m/s^2.

C. ĐỀ BÀI TẬP

18. Tính đạo hàm của hàm số đến cấp đã chỉ ra:

a) $y = (5-x)^{10}$, $y^{(9)}$; b) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$, $y^{(n)}$

c) $y = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$, $y^{(n)}$; d) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, $y^{(n)}$

e) $y = \sin x\sin 5x$, $y^{(n)}$; f) $y = x^2\sin 2x$, $y^{(n)}$

19. Chứng minh rằng

a) Nếu $y = A\sin(\omega t + \varphi) + B\cos(\omega t + \varphi)$ thì $y'' + \omega^2y = 0$

b) Nếu $y = \sqrt{2x - x^2}$ thì $y^3y'' + 1 = 0$

20. Cho hàm số $y = mx^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$. Tìm m để y'' là bình phương của một nhị thức.

21. Một chất điểm chuyển động với phương trình $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$, trong đó s tính bằng mét (m), t tính bằng giây (s).

a) Tính vận tốc tại thời điểm t = 2;

b) Tính gia tốc tại thời điểm t = 3;

c) Tính gia tốc tại thời điểm vận tốc bằng 0;

d) Tính vận tốc tại thời điểm gia tốc bằng 0.

22. Chứng minh rằng nếu hàm f(x) có đạo hàm cấp n thì

$$\left[f(ax+b)\right]^{(n)} = a^nf^{(n)}(ax+b).$$

($f^{(n)}(ax+b)$ là đạo hàm cấp n theo biến số (ax + b)).

23. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau :

a) Đạo hàm cấp 5 của hàm số $y = (2x - 5)^5$ tại điểm x = 2 là

A) $4!\,2^5$; B) $5!\,2^4$; C) $5!\,2^5$; D) $5!\,2^6$

b) Đạo hàm cấp 4 của hàm số $y = \cos^2 x$ tại $x = \dfrac{\pi}{3}$ là

A) – 2 ; B) – 4 ; C) 5 ; D) 6

c) Đạo hàm cấp 3 của hàm số y = tanx tại $x = \dfrac{\pi}{6}$ là

A) $\dfrac{8}{27}$; B) $-\dfrac{16}{9}$; C) $\dfrac{16}{3}$; D) $\dfrac{3}{16}$

d) Đạo hàm cấp 10 của hàm số $y = \dfrac{1}{2x-1}$ tại điểm x = 0 là

A) $10!\,2^{11}$; B) $-10!\,2^{11}$; C) $10!\,2^{10}$; D) $-10!\,2^{10}$

e) Đạo hàm cấp 6 của hàm số $y = x^5 + 1 - \dfrac{1}{3x+1}$ là

A) $\dfrac{-3.6!}{(3x+1)^7}$; B) $\dfrac{3^6.6!}{(3x+1)^7}$; C) $\dfrac{3^5.7!}{(3x+1)^6}$; D) $\dfrac{-3^5.7!}{(3x+1)^6}$

f) Đạo hàm cấp 7 của hàm số y = 3sin5x là

A) $3.\,5^7\cos 5x$; B) $-3.\,5^7\cos 5x$; C) $3.\,5^7\sin 5x$; D) $-3.\,5^7\sin 5x$.

PHẦN II. LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Chương I.

I. HÀM SỐ TUẦN HOÀN VÀ HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Câu trả lời đúng là D vì tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$, f(x+T) = – 2 với mọi T, nhưng không có số dương nhỏ nhất thoả mãn điều kiện đó.

2. a) Hàm số xác định khi và chỉ khi x thoả mãn: $3x + \dfrac{\pi}{3} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{\pi}{3}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{9} + k\dfrac{\pi}{3}, k \in Z\right\}$

b) Hàm số xác định khi và chỉ khi x thoả mãn:

$$\begin{cases} \dfrac{1+\sin x}{3x-5} \geq 0 \\ 3x - 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x - 5 > 0 \text{ (vì } 1 + \sin x \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\text{)}$$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{5}{3}$ (hay $\left(\dfrac{5}{3};+\infty\right)$; c) Đáp số : $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$

d) Hàm số xác định khi và chỉ khi x thoả mãn

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+5x+4}{1+\cos x} \geq 0 \\ 1 + \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + 4 \geq 0 \\ 1 + \cos x \neq 0 \end{cases} \text{ (vì } 1 + \cos x \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\text{).}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq -1 \\ x \leq -4 \end{array}\right. \\ \cos x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq -1 \\ x \leq -4 \end{array}\right. \\ x \neq \pi + k2\pi \end{cases}$$ Vậy tập xác định của hàm số là

$D = (-\infty;-4] \cup [-1;+\infty) \setminus \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

3. a) Ta có $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$. Do tính tuần hoàn của hàm số

y = sinx với chu kì 2π, nên $\sin x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$ $k \in \mathbb{Z}$.

Vì $-\frac{\pi}{6} > -3$ và $\frac{7\pi}{6} < 5$, nên khi k = 0 thì $x \in [-3; 5]$. Còn khi $k \geq 1$ hoặc $k < -1$ thì rõ ràng $x \notin [-3, 5]$. Khi k = − 1 có $x_1 = -\frac{\pi}{6} - 2\pi < -3$;

$x_2 = \frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6} \in [-3; 5]$. Vậy với các giá trị $x = -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}$ thuộc $[-3; 5]$ thì $\sin x = -\frac{1}{2}$.

b) Đáp số x = 0; π. Hướng dẫn: Làm tương tự câu a với $x = k\pi$.

c) Hàm số y = sinx nhận giá trị âm khi x thuộc góc phần tư thứ III và thứ IV. Theo tính tuần hoàn của hàm số sin thì giá trị của y=sinx âm khi x $\in \left((2k-1)\pi; k2\pi\right)$. Mặt khác ta có : $[-3; 5] = [-3; 0) \cup [0; 5]$. Dễ dàng thấy rằng trong các khoảng trên có khoảng $(-\pi, 0)$, khi k = 0, chứa $[-3; 0)$; khoảng $(\pi; 2\pi)$, khi k = 1, chứa [0; 5] và [− 3; 5] nằm ngoài các khoảng khác. Vậy hàm số y = sinx nhận giá trị âm khi $x \in [-3; 0) \cup (\pi; 5]$.

d) Giải tương tự như câu c) ta có kết quả $x \in (0; \pi)$.

4. a) Vì $-1 \le \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \le 1$ nên $-4 \le \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \le 4$. Từ đó $-11 \le y \le -3$.

Vậy $y_{\min} = -11$ khi $x + \frac{\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3}$; $y_{\max} = -3$ khi $x + \frac{\pi}{3} = \pi$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}.$$

b) Hướng dẫn: Đánh giá $\sqrt{4+5\sin x}$ với lưu ý biểu thức trong căn không âm.

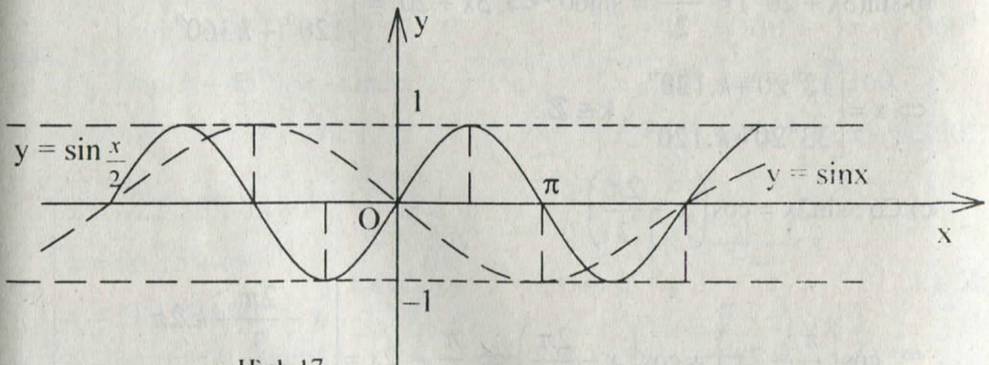
$y_{\min} = 2$ khi $\sin x = -\frac{4}{5}$; $y_{\max} = 5$ khi $x = \frac{\pi}{2}$.

5. Vì $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right]$ thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số y = tanx đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right]$. Từ đó $y_{\min} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$; $y_{\max} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

6. Đồ thị của hàm số $y = |\cot x|$ được suy ra từ đồ thị của hàm số y = cotx bằng cách giữ nguyên phần đồ thị nằm phía trên trục hoành và lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành. Học sinh tự vẽ đồ thị.

7. Trước hết hãy chứng minh hàm số $y = \sin\frac{x}{2}$ là hàm số tuần hoàn với chu kì 4π.

Thật vậy, ta có $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ và $f(x + 4\pi) = \sin\frac{x+4\pi}{2} = \sin\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) = \sin\frac{x}{2} =$ f(x) (vì hàm số y = sinx tuần hoàn với chu kì 2π). Để chứng minh 4π là số dương nhỏ nhất thoả mãn tính chất trên ta dùng phương pháp phản chứng như trong ví dụ 7c. Vậy chu kì của hàm số $y = \sin\frac{x}{2}$ gấp hai lần của hàm số y = sinx tức là khi hàm số y = sinx biến thiên trong hai chu kì thì hàm số $y = \sin\frac{x}{2}$ mới biến thiên trong một chu kì. Nói cách khác, đồ thị của hàm số $y = \sin\frac{x}{2}$ được suy ra từ đồ thị của hàm số y = sinx bằng cách dãn ra khỏi trục tung hai lần. Đồ thị của hai hàm số như sau: (hình 17)



Hình 17

8. Đồ thị của hàm số $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ được suy ra từ đồ thị của hàm số y = tanx bằng cách tịnh tiến song song với trục tung sang phải $\frac{\pi}{4}$ đơn vị. Học sinh tự vẽ đồ thị của hàm số.

9. Ta có $f(x) = \tan 3x = \tan(3x + \pi) = \tan 3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = f\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \forall \in \mathbb{R}$. $\frac{\pi}{3}$ là số dương nhỏ nhất có tính chất này. Thật vậy, giả sử ngược lại, có số T sao cho $0 < T < \frac{\pi}{3}$ thoả mãn : $\tan 3(x + T) = \tan 3x, \forall x \in \mathbb{R}$. Chọn $x = 0$ ta có $\tan 3T = 0$ nhưng $\tan\alpha = 0$ khi và chỉ khi $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, do đó phải có: $3T = k\pi$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $0 < T < \frac{\pi}{3}$.

II. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

10. a) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = \left[\begin{array}{l} \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} + k\pi \\ -\frac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$; $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\sin(3x + 20^0) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^0 \Leftrightarrow 3x + 20^0 = \left[\begin{array}{l} 60^0 + k360^0 \\ 120^0 + k360^0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = \left[\begin{array}{l} 13^0 20' + k.120^0 \\ 33^0 20' + k.120^0 \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) Có : $\sin 2x = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = \left[\begin{array}{l} x - \frac{2\pi}{3} + k.2\pi \\ \frac{2\pi}{3} - x + k.2\pi \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k.2\pi \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Đáp số : $\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{4}$.

e) Phương trình tương đương với (áp dụng công thức: $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$; $\tan\alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Phương trình $\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k.\frac{2\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

f) Giải tương tự như bài c) ta được đáp số $x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{9}$ và $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

11. a) Đáp số : $\frac{\pi}{18} + \frac{1}{3} + k\frac{\pi}{3}$; b) $45^0 + k90^0$ ($k \in \mathbb{Z}$) ;

c) $\cos(x - 5) = \cos(1 + 2x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 5 = 1 + 2x + k2\pi \\ x - 5 = -1 - 2x + k2\pi \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 + k2\pi \\ x = \frac{4}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$ ($k \in \mathbb{Z}$).

d) Phương trình tương đương với $\sin^2(x - 45^0) - \cos^2(3x + 90^0) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\sin(x - 45^0) - \cos(3x + 90^0)\right]\left[\sin(x - 45^0) + \cos(3x + 90^0)\right]$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(x - 45^0) = \sin 3x \\ \sin(x - 45^0) = -\sin 3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 45^0 = 3x + k.360^0 \\ x - 45^0 = 180^0 - 3x + k.360^0 \\ x - 45^0 = -3x + k.360^0 \\ x - 45^0 = 180^0 + 3x + k.360^0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -22^0 30' + k.180^0 \\ x = 56^0 15' + k90^0 \\ x = 11^0 15' + k90^0 \\ x = -112^0 30' + k180^0 \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$; e) Đáp số $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$

12. a) $\sin(x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - k\pi = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 + \sqrt{4 + k\pi} \\ x = 2 - \sqrt{4 + k\pi} \end{array}\right.$

với $4 + k\pi \geq 0 \Leftrightarrow k \geq -\frac{4}{\pi}$. Vậy $x = 2 \pm \sqrt{2 + k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq -1$.

b) $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} - 2 + k\pi}$, $k \in N^*$; c) $x = -2 \pm \sqrt{2 + k\pi}$ với $2 + k\pi \geq 0$ và $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k \in N$;

d) $x = \pm \arccos\frac{\pi}{12} + k2\pi$; e) $x = \pm\frac{\sqrt{\pi - 4 + 4k\pi}}{2}$, $k \in N^*$;

f) $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\cos \pi x\right) = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{5\pi}{3}\cos \pi x = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \cos \pi x = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{10} + \frac{6}{5}k \\ \frac{1}{2} + \frac{6}{5}k \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$. Điều kiện để phương trình có nghiệm là

$-1 \leq \frac{1}{10} + \frac{6}{5}k \leq 1$ và $-1 \leq \frac{1}{2} + \frac{6}{5}k \leq 1$ ($k \in \mathbb{Z}$), hoặc $-\frac{11}{12} \leq k \leq \frac{3}{4}$ hoặc $-\frac{5}{4} \leq k \leq \frac{5}{12}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Từ đó có 3 giá trị đáp ứng yêu cầu: $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{10}$ (khi k = 0) và $-\frac{7}{10}$ (khi k = –1). Như vậy phương trình đã cho tương đương với $\left[\begin{array}{l} \cos \pi x = \frac{1}{2} \\ \cos \pi x = \frac{1}{10} \\ \cos \pi x = -\frac{7}{10} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \pi x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \pi x = \pm\arccos\frac{1}{10} + k2\pi \\ \pi x = \pm\arccos\left(-\frac{7}{10}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{1}{3} + 2k \\ x = \pm\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{10} + 2k \\ x = \pm\frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{7}{10}\right) + 2k \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

13. a) Đặt $\sin^2 x = t$ ($0 \leq t \leq 1$) ta được $3t^2 + 5t - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{8}{3} \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$

Với t = 1 ta có $\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$

hay $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ;

b) Đặt tanx = t. Đáp số : $\frac{\pi}{4} + k\pi$; $\arctan\left(1 + \sqrt{5}\right) + k\pi$; $\arctan\left(1 - \sqrt{5}\right) + k\pi$, $k \in Z$;

c) Đáp số : $x = (2k + 1)\pi$;

$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; d) Đặt cotx = t ta được phương trình có hai nghiệm: $t_1 = -1$ và $t_2 = -\frac{7}{5}$. Vậy có kết quả là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \text{arccot}\left(-\frac{7}{5}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; e) Đặt cosx = t ($|t| \leq 1$) được phương trình :

$2t^2 - \left(3 + \sqrt{3}\right)t + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$. Đáp số $x = k2\pi$ và $x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi$

14. a) Ở vế trái ta có biến đổi tổng thành tích bằng cách nhóm số hạng đầu và số hạng cuối, còn sin2x thay bằng 2sinx cosx. Khi đó phương trình đã cho trở thành phương trình :

$$4\sin x \cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = 0 & (1) \\ \cos\frac{3x}{2} = 0 & (2) \\ \cos\frac{x}{2} = 0 & (3) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow x = k\pi$; (2) $\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$; (3) $\Leftrightarrow (2k + 1)\pi$. Vậy kết quả là $x = k\pi$ và $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Thay cos2x = 1 – 2sin²x và đặt sinx = t ($|t| \le 1$) để đưa về phương trình :

$2t^2 - 4t + 3 = 0$. Phương trình này vô nghiệm, nên phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Áp dụng công thức góc nhân ba : $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ và công thức góc nhân đôi $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, ta có phương trình tương đương:

$$\sin x(4\sin^2 x - 4\sin x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sin x = 0 & (1)\\ 4\sin^2 x - 4\sin x - 3 = 0 & (2)\end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow x = k\pi \ ; (2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -\dfrac{1}{2}\\ \sin x = \dfrac{3}{2} \quad \text{(loại)}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right.$$

Đáp số : $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$; $x = k\pi$ và $x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Phương trình tương đương với $3\cos x + 5 = |\cos x|$ (*). Qua đánh giá hai vế của (*), có thể thấy (*) và do đó phương trình đã cho là vô nghiệm. Thật vậy, ta có VP ≤ 1, còn $2 \le$ VT ≤ 8. Cũng có thể giải (*) theo cách bình thường, tức là xét hai phương trình: 3cosx + 5 = ± cosx cũng đi đến kết luận trên.

15. a) Chia cả hai vế cho $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ta được $\dfrac{3}{5}\sin x + \dfrac{4}{5}\cos x = 1$.

Đặt $\dfrac{3}{5} = \cos\alpha$ và $\dfrac{4}{5} = \sin\alpha$, ta có $\cos\alpha \sin x + \sin\alpha \cos x = 1$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha = \arcsin\dfrac{4}{5}$.

b) Phương trình có nghiệm vì $2^2 + 2^2 > \left(1 - \sqrt{3}\right)^2$. Phương trình tương đương với:

$$\sin x - \cos x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm\arccos\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Đáp số: $x = -\dfrac{\pi}{18} - \dfrac{\alpha}{3} + k\dfrac{2\pi}{3}$ và $x = \dfrac{7\pi}{18} - \dfrac{\alpha}{3} + k\dfrac{2\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$), trong đó $\sin\alpha = \dfrac{5}{7}$ và $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{7}$.

d) Phương trình vô nghiệm.

16. a) Thay $4 = 4(\sin^2 x + \cos^2 x)$ rồi chuyển vế, ta có phương trình tương đương sau:

$$6\sqrt{3}\sin x\cos x - 6\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos x = 0 & (1)\\ \sqrt{3}\sin x - \cos x = 0 & (2)\end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; (2) $\Leftrightarrow \tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

b) Thực hiện như câu trên ta có phương trình: $3\sin^2 x - \sin x\cos x - 4\cos^2 x = 0$ (*). Trong (*) thấy $\cos x \ne 0$ (vì ngược lại thì sinx = 0, nhưng không có góc nào làm cho cả sin lẫn cosin bằng không).

Chia cả hai vế của (*) cho cos²x và đặt tanx = t ta có: $3t^2 - t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = -1\\ t = \dfrac{4}{3}\end{array}\right.$

Từ đó ta có đáp số: $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \arctan\dfrac{4}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

c) Điều kiện $\sin x \ne 0$ (để cotx có nghĩa), chia cả hai vế cho sin²x ta được (sau khi thay $\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$) : $2\cos x + 2\cot x(1 + \cot^2 x) = 3(1 + \cot^2 x)$

$$\Leftrightarrow 2\cot^3 x - 3\cot^2 x + 4\cot x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot x = 1\\ 2\cot^2 x - \cot x + 3 = 0 \quad \text{(vô nghiệm)}\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$. d) Thấy $\cos x \ne 0$. Chia cả hai vế cho cos³x và đặt tanx = t ta được:

$2t^3 - 3t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(2t^2 - t + 1) = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$ (vì $2t^2 - t + 1 = 0$ vô nghiệm). Đáp số $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

17. a) Phương trình tương đương với sinx − cosx + 4sinx cosx + 1 = 0.

Đặt sinx − cosx = t ($|t| \le \sqrt{2}$) ta được phương trình bậc hai đối với t: $2t^2 - t - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \dfrac{3}{2} \qquad \text{(loại) vì } \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 > \left(\sqrt{2}\right)^2 \end{array}\right.$$

Vậy có phương trình: $\sin x - \cos x = -1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \left[\begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = k2\pi$ và $x = \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

b) Đặt sinx + cosx = t ($|t| \le \sqrt{2}$),

khi đó: $1 + 2\cos x \sin x = t^2 \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$ và ta có $t = 1 - (t^2 - 1)$

$$\Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 < -\sqrt{2} \qquad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy ta có phương trình $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sin\dfrac{\pi}{4}$.

Cuối cùng đáp số là: $x = k2\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

c) Tiến hành như hai câu trên ta có đáp số là: $x = k2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$,

$x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

18. a) Hướng dẫn: Ta thấy rằng $\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{3x}{2} = \pi - 3\left(\dfrac{3\pi}{10} - \dfrac{x}{2}\right)$,

nên đặt $\left(\dfrac{3\pi}{10} - \dfrac{x}{2}\right) = t$ ta được phương trình $\sin t = \dfrac{1}{2}\sin 3t = \dfrac{1}{2}(3\sin t - 4\sin^3 t)$.

Sau khi rút gọn và giải phương trình ta được:

$$\left[\begin{array}{l} t = k\pi \\ t = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ t = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{5} + k2\pi \\ x = \dfrac{4\pi}{15} + k2\pi \\ x = \dfrac{14\pi}{15} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Chủ yếu ở đây là biết cách gộp các số hạng với nhau một cách hợp lí để biến đổi thành tích. ở vế trái gộp 1 với cos4x, ở vế phải gộp sin2x với sin6x, sau khi biến đổi ta có: (2cos2x + 1)(sin4x − cos2x) = 0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} \\ \sin 4x = \cos 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos 2x = \cos\dfrac{2\pi}{3} & (1) \\ \sin 4x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1) và (2) ta đi đến đáp số: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$; $x = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}$; $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

c) áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng, sau khi rút gọn ta được

$\cos 5x = \cos 21x \Leftrightarrow 5x = \pm 21x + k2\pi \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{13}$ và $x = k\dfrac{\pi}{8}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

d) Đáp số $x = \pm\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

19. Đối với phương trình chứa tang và cotang trước hết ta phải đặt điều kiện. Ở bài a ta phải áp dụng công thức nhân ba đối với tang.

a) Điều kiện cos2x ≠ 0 và cos3x ≠ 0. Ta có phương trình tương đương:

3(tan2x − tan3x) = tan3x(tan2x tan3x + 1) (*).

Ta thấy tan2x .tan3x + 1 ≠ 0 vì nếu không thì tan2x = tan3x và phương trình đã cho trở thành $\tan^2 x = -1$ là vô lí. Vậy (*) $\Leftrightarrow \dfrac{3(\tan 2x - \tan 3x)}{\tan 2x \tan 3x + 1} = \tan 3x$

$$\Leftrightarrow -3\tan x = \tan 3x \Leftrightarrow -3\tan x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \tan x = 0 & (1) \\ -3 = \dfrac{3-\tan^2 x}{1-3\tan^2 x} & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow$ x = kπ ; (2) $\Leftrightarrow -3 + 9\tan^2 x = 3 - \tan^2 x \Leftrightarrow \tan x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

$x = \arctan\left(\pm\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right) + k\pi$. Đáp số : x = kπ và $x = \arctan\left(\pm\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right) + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

b) Điều kiện $\cos x \neq 0$; $\sin 2x \neq 0$ và $\sin 3x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với cot3x ($\tan^2 x$ $\cot^2 2x$ – 1) = $\tan^2 x$ – $\cot^2 2x$

$$\Leftrightarrow \cot 3x \frac{\sin^2 x\cos^2 2x - \cos^2 x\sin^2 2x}{\cos^2 x.\sin^2 2x} = \frac{\sin^2 x.\sin^2 2x - \cos^2 2x.\cos^2 x}{\cos^2 x.\sin^2 2x}$$

$\Leftrightarrow$ cot3x (sinx cos2x – cosx sin2x)(sinx cos2x + cosx cos2x)

= (sinx sin2x – cosx cos2x)(sinx sin2x + cosx cos2x)

$\Leftrightarrow$ cot3x sin(– x) sin3x = – cosx cos3x $\Leftrightarrow$ cos3x sinx = cosx cos3x

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0 \\ \sin x = \cos x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

c) Hướng dẫn: Viết 3cot3x = 2cot3x + cot3x. Áp dụng các hệ thức

$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $\cot 3x = \dfrac{\cos 3x}{\sin 3x}$,... Đáp số: x = kπ .

20. a). Áp dụng công thức hạ bậc, có phương trình tương đương:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{m(1+\cos 2x)}{2} - \frac{1}{2}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow (m-1)\cos 2x - \sin 2x = -(1+m)$$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $(m-1)^2 + 1^2 \geq (1+m)^2 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{1}{4}$.

b) Phương trình tương đương với: $(m+1)\dfrac{1-\cos 2x}{2} - \sin 2x + \cos x = 0$. Thực hiện như câu trên ta có kết quả: $m \leq 1$

c) Đáp số $m \in (-\infty;1] \cup \left[\dfrac{10}{7},+\infty\right)$; d) Điều kiện : $\cos x \neq 0$ chia cả hai vế cho cosx ta được: $2m\tan x + (m+1) = m(1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow m\tan^2 x - 2m\tan x - 1 = 0$.

Đây là phương trình bậc hai đối với tanx. Để phương trình có nghiệm thì :

$\Delta' = m^2 + m \geq 0$ và $m \neq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty;-1] \cup (0;+\infty]$

21. a) Với m = 1, ta có phương trình

$(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 1) = 3 - 4\cos^2 x$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 1) = (2\sin x - 1)(2\sin x + 1) \Leftrightarrow$

$(2\sin x - 1)2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \cos 2x = 0 \end{array}\right.$ và ta có các nghiệm là: $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$;

$x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$; $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) ;

b) Như trên ta có phương trình:

$(2\sin x - 1)(2\cos x + m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6} (*) \\ \cos 2x = \dfrac{1-m}{2} (**) \end{array}\right.$ Ta thấy (*) có hai nghiệm thuộc $[0,\pi]$ là $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$ và $x_2 = \dfrac{5\pi}{6}$, như vậy để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm $\in [0;\pi]$ thì (**) hoặc vô nghiệm hoặc chỉ có nghiệm trùng với một hoặc cả hai nghiệm của (*) trong $[0;\pi]$. Xét hai trường hợp này: i)(**) vô nghiệm $\Leftrightarrow \left|\dfrac{1-m}{2}\right| > 1 \Leftrightarrow |1-m| > 2 \Leftrightarrow m < -1$ và $m > 3$. ii) Ta có (**)

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = \dfrac{1-m}{2}$. Theo phương trình trên phương trình này trong $[0;\pi]$

chỉ có một nghiệm trùng với một nghiệm của (*) tức là $\sin x = \frac{1}{2}$.

Vậy, ta có $1 - 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1-m}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ m = 0. Với m = 0 (**) trở thành $\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$,

suy ra (**) trong $[0;\pi]$ có hai nghiệm trùng với nghiệm của (*).

Kết quả: m <–1; m = 0; m > 3.

22. Có phương trình tương đương: $4\cos^3x - 3\cos x - m\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(4\cos^2x - 3 - m) = 0 \Leftrightarrow \cos^2x = \frac{m+3}{4}$ (do điều kiện đầu bài loại cosx = 0)

Vậy để phương trình có nghiệm $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ta phải có

$0 < \frac{m+3}{4} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < m + 3 \leq 4 \Leftrightarrow 3 < m \leq 1.$

23. Câu trả lời đúng là C. Ta có thể giải phương trình đó rồi kết luận. Có thể kiểm tra khi k = 0, từ đó loại A, D và E. B là trường hợp của C khi k chia hết cho 3; với k = 1, C là đúng.

24. Câu trả lời đúng là C vì phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $1 + m^2 \geq 1$

$\Leftrightarrow m^2 \geq 0$ đúng với mọi m.

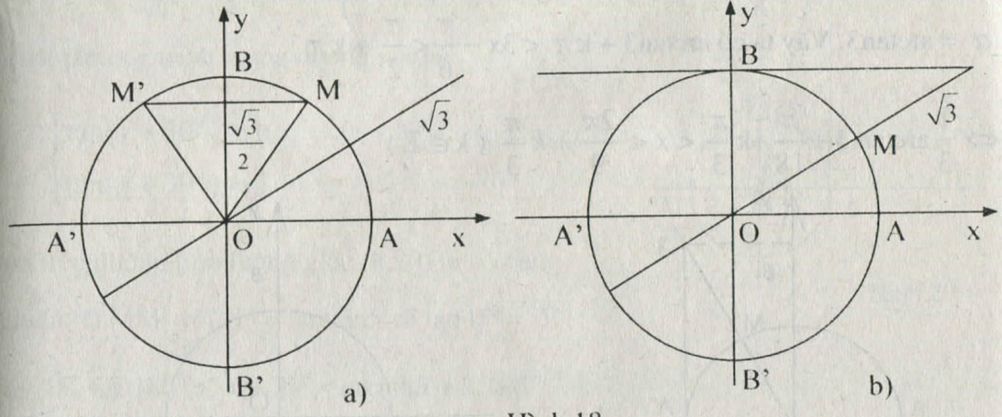
25. Với k = 0, B và C là sai mà E là hợp của A và D mà cả A và D đều là nghiệm. Vậy câu trả lời đúng là E.

26. Khi cho k = 0 ta thấy tất cả đều đúng. Gộp 3 nghiệm trên đường tròn lượng giác ta được C. Vậy câu trả lời đúng là C.

III. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

27. Tất cả các bài đều dựa trên đường tròn lượng giác.

a) Bất phương trình tương đương với (dựa trên đường tròn lượng giác (h.18a) cung nghiệm đối với 3x là $\overset{\frown}{M'B'M}$)



Hình 18

$$-\frac{4\pi}{3} + k2\pi \leq 3x \leq \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow -\frac{4\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})\, o$$

b) Đáp số: $\frac{2\pi}{15} + k\frac{2\pi}{5} < x < \frac{4\pi}{15} + k\frac{2\pi}{5}$

c) Đáp số: $\arctan(-3) + k\pi < x < -\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

d) Hướng dẫn: Xét hai trường hợp:

i) $\cos 2x > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k2\pi < 2x < \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$

ii) $\cos 2x < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi$ (mọi x trong khoảng này là nghiệm của bất phương trình vì mọi số âm nhỏ hơn $\sqrt{2}$). Kết hợp với i) ta có đáp số:

$$-\frac{\pi}{8} + k\pi < x < \frac{\pi}{8} + k\pi \text{ và } \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

e) Dựa trên đường tròn lượng giác (h.b) cung nghiệm là $\overset{\frown}{AM}$ và $\overset{\frown}{A'M'}$ với

$\sqrt{3} = \cot\frac{\pi}{6}$. Vậy nghiệm của bất phương trình là $k\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$ (k∈ $\mathbb{Z}$)

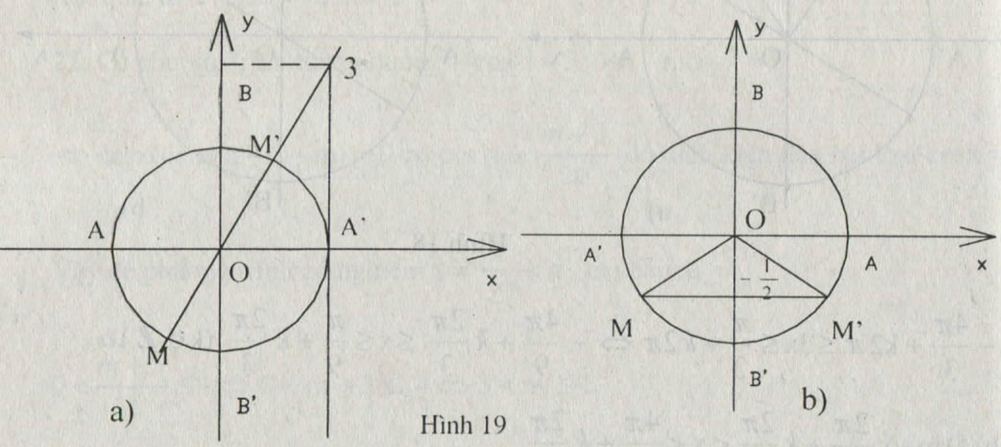
f) Vô nghiệm.

28. Cũng như bài trên ta phải dựa trên đường tròn lượng giác

a) Xem h.a . Ta có cung nghiệm là $\overset{\frown}{MB}$ và $\overset{\frown}{M'B'}$ với $\tan\alpha = 3$ hay

α = arctan3. Vậy ta có $\arctan 3 + k\pi < 3x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\arctan 3 + \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}$ (k∈ $\mathbb{Z}$)



Hình 19

b) Xem h.b. Cung nghiệm là MB'M' với $-\frac{1}{2} = \sin(-30^0) = \sin(-150^0)$.

Vậy nghiệm $\dfrac{\lim\limits_{x_n\to 1}(x_n^3 - 3x_n + 1)}{\lim\limits_{x_n\to 1} 2x_n - 1}$ của bất phương trình là:

$--150^0 + k360^0 \le x + 75^0 \le -- 30^0 + k.360^0$

$\Leftrightarrow -225^0 + k.360^0 \le x \le -105^0 + k.360^0$

c) Đáp số $x = \frac{7\pi}{6} + k\pi$ (k∈ $\mathbb{Z}$) (chỉ có một giá trị của x thoả mãn cosx ≤ –1).

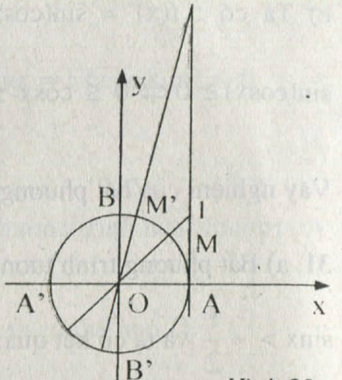
d) Đáp số $k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$ (k∈ $\mathbb{Z}$).

29. a) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le \cos 2x < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x < 3 \\ \cos 2x \ge -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Dựa trên đường tròn lượng giác (học sinh tự vẽ) ta có đáp số: $-\frac{5\pi}{12} + k\pi \le x \le \frac{5\pi}{12} + k\pi$, (k∈ $\mathbb{Z}$).

b) Bất phương trình tương đương với hệ

$$\begin{cases} \tan(x + 30^0) \ge 1 \\ \tan(x + 30^0) < 5 \end{cases}$$



Hình 20

Dựa trên đường tròn lượng giác (h.20) ta có cung nghiệm là MM' với α^0 = arctan5 và $\tan 45^0 = 1$.

Vậy $45^0 + k.180^0 \le x + 30^0 < \arctan 5 + k.180^0$

$\Leftrightarrow 15^0 + k.180^0 \le x < \arctan 5 - 30^0 + k.180^0$ (k∈ $\mathbb{Z}$)

c) Đáp số: $\text{arc}\cot 20 - 5 + k\pi < x \le \text{arc}\cot 10 - 5 + k\pi$ (k∈ $\mathbb{Z}$)

d) Đáp số : $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right) - 15 + k2\pi \le x \le \frac{\pi}{6} - 15 + k2\pi$ (k∈ $\mathbb{Z}$)

30. a) Biến đổi vế trái của bất phương trình ta được bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình: $\sin 4x \le \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow -\frac{7\pi}{6} + k2\pi \le 4x \le \frac{\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow -\frac{7\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}$

b) Bất phương trình tương đương với :

$\cos 4x + \cos 2x < 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 < 0$ (*).

Đặt cos2x = t ($|t| \le 1$) ta có : $2t^2 + t - 1 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$.

Từ đó ta có $\cos 2x < \frac{1}{2}$ và $\cos 2x \ne -1$.

Giải bất phương trình này ta có đáp số:

$\frac{\pi}{6}+k\pi < x < \frac{5\pi}{6}+k\pi$, $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

c) Ta có : $f(x) = \sin(\cos x)$ tuần hoàn với chu kì 2π. Từ đó, trên $[0;2\pi]$:

$\sin(\cos x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \cos x \leq \pi$ hay $0 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $-\frac{\pi}{2}+k2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}+k2\pi$.

31. a) Bất phương trình tương đương với:

$\sin x > -\frac{1}{2}$ và ta có kết quả: $-\frac{\pi}{6}+k2\pi < x < \frac{7\pi}{6}+k2\pi$.

b) Điều kiện $\cos x \neq 0$ và $\tan x \neq \pm 1$ ta có bất phương trình tương đương:

$\frac{\tan^2 x-3}{\tan^2 x-1} < 0$. Lập bảng xét dấu ta thấy bất phương trình tương đương với

$-\sqrt{3} < \tan x < -1$ hoặc $1 < \tan x < \sqrt{3}$. Từ đó ta có kết quả:

$-\frac{\pi}{3}+k\pi < x < -\frac{\pi}{4}+k\pi$ và $\frac{\pi}{4}+k\pi < x < \frac{\pi}{3}+k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

c) Có hai hệ tương đương : hoặc $\begin{cases}\sin x \geq 0\\ \cos x+\frac{1}{2} \leq 0\end{cases}$ (I) hoặc $\begin{cases}\sin x \leq 0\\ \cos x+\frac{1}{2} \geq 0\end{cases}$ (II)

Giải (I) ta được $\frac{2\pi}{3}+k2\pi < x \leq \pi+k2\pi$. Giải (II) ta được:

$-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3}+k2\pi$. Kết hợp (I) và (II) ta có đáp số sau:

$-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \leq x \leq k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

32. Thực chất ở đây là giải các bất phương trình lượng giác

a) Điều kiện: $4\sin 2x - (\sin 3x + \sin x) > 0 \Leftrightarrow 4\sin 2x - 2\sin 2x\cos x > 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x(2$

$-\cos x) > 0 \Leftrightarrow \sin 2x > 0 \Leftrightarrow k\pi < x < \frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Điều kiện: $\cos x - \sin x \geq 1 \Rightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2}+k2\pi \leq x \leq k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. c) Điều kiện : $2\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) - \cos^2 x \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 - \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - 1 + \sin^2 x \geq 0 \Leftrightarrow \sin^2 x - \sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x\ (\sin x \quad 1) \geq 0$

$\Rightarrow \sin x \leq 0$ (vì $\sin x \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$). Từ đó hoặc $\sin x = 1$ hoặc $\sin x \leq 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+k2\pi$ và $(2k+1)\pi \leq x \leq (2k+2)\pi$.

33. Câu trả lời đúng là C, bằng cách giải trực tiếp bất phương trình hoặc loại trừ A (viết không đúng); B và D bằng cách thử trực tiếp.

34. Câu trả lời là B, vì dễ dàng loại bỏ A và C, lấy k = 1 ta có thể loại D.

35. Câu trả lời đúng là B vì $|\sin(5x+3)| \leq 1$, mà $\frac{3}{2} > 1$.

36. Câu trả lời đúng là C, có thể loại ngay A và B, D là trường hợp riêng của C và thử lại phần C không có trong D ta thấy ngay.

Chương II.

I. HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN.

1. Sách giáo khoa với 15 cuốn và sách tham khảo với 20 cuốn thì:

a) Theo quy tắc cộng, cần mua 1 cuốn trong 2 loại sách trên có : $15 + 20 = 35$ cách chọn mua.

b) Theo quy tắc nhân cần mua mỗi loại 1 cuốn có $15.20 = 300$ cách chọn mua.

2.a) Mỗi kí tự là một chữ số hay một chữ cái nên theo quy tắc cộng có $10 + 26 = 36$ cách chọn kí tự cho mỗi vị trí của dãy. Dãy gồm 6 kí tự nên có $36^6 = 2.176.782.336$ dãy.

b) Mật khẩu là dãy 6 kí tự, trong đó có ít nhất 1 chữ cái nên số dãy không là mật khẩu (tất cả 6 kí tự đều là chữ số) là 10^6. Do đó số dãy là mật khẩu là: $36^6 - 10^6 = 2.175.782.336$ dãy.

3. Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số tự nhiên cần lập với a_i là chữ số ở vị trí thứ i.

a) Chữ số hàng trăm là 4 nên $n = \overline{a_1 4 a_2 a_3}$. Nếu $a_1 = 6$ thì $n = 64a_3a_4$. Khi đó a_3 có 5 cách chọn (chọn 1 trong 5 số 0, 1, 2, 3, 5) và a_4 có 4 cách chọn (chọn một trong 4 số 0, 1, 2, 3, 5 sau khi trừ số là a_3 đã chọn). Do đó sẽ có $5.4 = 20$ số n. Nếu $a_3 = 6$ thì $n = \overline{a_1 46 a_4}$. Khi đó a_1 có 4 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$ và chọn trong 4 số 1, 2, 3, 5) và a_4 có 4 cách chọn (chọn trong các số 0, 1, 2, 3, 5 sau khi bỏ đi số là a_1). Do đó sẽ có $4.4 = 16$ số n. Nếu $a_4 = 6$ thì tương tự như a_3, sẽ có 16 số n. Tổng cộng sẽ có: $20 + 16 + 16 = 52$ số n được lập.

b) Một trong 2 số đầu là 3 tức $a_1 = 3$ hoặc $a_2 = 3$ và n chia hết cho 5 nên $a_4 = 0$ hoặc $a_4 = 5$. Nếu $a_1 = 3$ và $a_4 = 0$ thì a_2 có 5 cách chọn, a_3 có 4 cách chọn. Do đó có $5.4 = 20$ số n. Nếu $a_1 = 3$ và $a_4 = 5$ thì a_2 có 5 cách chọn và a_3 có 4 cách chọn nên có $5.4 = 20$ số n. Nếu $a_2 = 3$ và $a_4 = 0$ thì a_1 có 5 cách chọn và a_3 có 4 cách chọn nên có $5.4 = 20$ số n. Nếu $a_2 = 3$ và $a_4 = 5$ thì

a_1 có 4 cách chọn (vì a_1 phải khác 0) và a_3 có 4 cách nên có $4.4 = 16$ số n.

Tổng cộng có: $20 + 20 + 20 + 16 = 76$ số n được lập.

4. a) Mỗi vị trí của số điện thoại đều có 10 cách chọn (chọn 1 trong 10 số từ 0 đến 9) nên số các số điện thoại có 7 chữ số sẽ là: $10.10.10.10.10.10.10 = 10^7$ số.

b) Vị trí đầu của số điện thoại là 8 nên có 1 cách chọn, mỗi vị trí từ thứ hai đến thứ sáu đều có 10 cách chọn, vị trí thứ 7 cuối cùng chỉ có 5 cách (vì số điện thoại là số lẻ) nên có: $1.10.10.10.10.10.5 = 5.10^5$ số.

c) Vị trí đầu là 8 nên có 1 cách chọn, mỗi vị trí thứ hai, thứ ba và thứ tư đều có 10 cách chọn, mỗi vị trí thứ 5 và 6 chỉ có 1 cách (vì phải là số đối xứng với vị trí thứ hai và ba đã chọn rồi), vị trí cuối cùng có 5 cách (vì số điện thoại là lẻ) nên có $1.10.10.10.1.1.5 = 5.10^3$ số.

5. Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3}$ là số cần lập.

a) $a_1 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ nên a_1 có 9 cách chọn, a_2 có 9 cách và a_3 có 8 cách chọn nên có: $9.9.8 = 648$ cách chọn.

b) a_1 có 5 cách chọn (vì chỉ có 5 số lẻ), a_2 có 5 cách chọn, a_3 có 5 cách chọn nên có $5.5.5 = 125$ số.

c) Trước hết ta xét $a_3 \in \{1,3,5,7,9\}$ nên có 5 cách chọn.

$a_1 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ và đã chọn a_3 nên có 8 cách chọn và

$a_2 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \setminus (\{a_3\} \cup \{a_1\})$ nên có 8 cách chọn. Do đó có: $5.8.8 = 320$ số (chú ý bài này không giải được bằng cách tính số cách lấy a_1 hoặc a_2 trước)

II. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP, TỔ HỢP, NHỊ THỨC NIU-TƠN

6. a) Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số cần tìm. Vì n là số chẵn và chữ số đầu tiên là số lẻ nên : a_6 có 5 cách chọn (chọn 1 trong 5 số chẵn 0, 2, 4, 6, 8); a_1 có 5 cách chọn (chọn 1 trong 5 số lẻ 1, 3, 5, 7, 9). Các số $\overline{a_2a_3a_4a_5}$ có

$A_8^4 = 8.7.6.5$ cách chọn. Do đó có $5.5.8.7.6.5 = 42000$ số n cần tìm.

b) Chọn 3 số trong 5 số lẻ có C_5^3 cách và chọn 3 số chẵn trong 5 số chẵn có C_5^3 cách. Mỗi lần ta hoán vị 6 chữ số đã chọn được 6! cách.

Do đó có $6!.\,C_5^3.C_5^3 = 72000$ số có 3 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn, trong đó có các số có số 0 đứng đầu. Vì các chữ số từ 0 đến 9 có vai trò như nhau nên loại bỏ các số có số 0 đứng đầu ta được số các số cần tìm là $\frac{9}{10}.72000 = 64800$ số.

7. Giả sử xếp học sinh lớp A trước thì có 10 cách chọn ghế ngồi. Sau đó xếp học sinh lớp B ngồi đối diện với học sinh lớp A vừa chọn ra thì có 5 cách chọn học sinh lớp B. Tiếp theo học sinh lớp A có 8 cách chọn ghế và có 4 cách chọn học sinh lớp B. Làm tương tự đến học sinh cuối cùng ta có :

10.5.8.4.6.6.4.2.2.1 = 5! 5! 2^5 = 460800 cách xếp.

8. a) Có $C_5^1.C_6^1.C_7^2$ cách chọn 4 học sinh gồm 1 của lớp A, 1 của lớp B và 2 của lớp C; Có $C_5^1.C_6^2.C_7^1$ cách chọn học sinh gồm 1 của lớp A, 2 của lớp B và 1 của lớp C; Có $C_5^2.C_6^1.C_7^1$ cách chọn học sinh gồm 2 của lớp A, 1 của lớp B và 1 của lớp C; Do đó có tất cả :

$C_5^1.C_6^1.C_7^2 + C_5^1.C_6^2.C_7^1 + C_5^2.C_6^1.C_7^1 = 630 + 525 + 420 = 1575$ cách.

b) Có : $C_5^1.C_6^2.C_7^1 + C_5^1.C_6^1.C_7^2 = 630 + 525 = 1155$ cách.

9. Chọn 4 bi trong phần gồm 4 bi đỏ và 5 bi trắng có C_9^4 cách. Chọn 4 bi trong phần gồm 4 bi đỏ và 6 bi xanh có C_{10}^4 cách. Chọn 4 bi trong phần gồm 5 bi trắng và 6 bi xanh có C_{11}^4 cách.Vì số bi lấy ra không đủ 3 màu tức là có nhiều nhất 2 màu nên có: $C_9^4 + C_{10}^4 + C_{11}^4 - (C_4^4 + C_5^4 + C_6^4) = 654$ cách.

(do trong tổng số $C_9^4 + C_{10}^4 + C_{11}^4$ có $2(C_4^4 + C_5^4 + C_6^4)$ cách lấy ra 1 loại bi)

10. a) Có C_{10}^5 cách chọn 5 người bất kỳ trong đó : Có $C_4^2.C_6^3$ cách chọn 5 người có 2 nữ và 3 nam; Có $C_4^3.C_6^2$ cách chọn 5 người có 3 nữ và 2 nam;Có $C_4^4.C_6^1$ cách chọn 5 người có 4 nữ và 1 nam.

Do đó có $C_{10}^5 - C_4^2.C_6^3 - C_4^3.C_6^2 - C_4^4.C_6^1 = 66$ cách. (Có thể tính kết quả là tổng của các cách chọn ra 5 người có 1 nữ và 4 nam và chọn ra 5 người đều là nam).

b) Có C_6^3 cách chọn ra 3 nam và C_4^2 cách chọn ra 2 nữ. Do đó có $C_6^3.C_4^2 = 120$ cách chia.

11.a) Ta coi mỗi số có 5 chữ số khác nhau lập được từ 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5 là một hoán vị của 5 số này. Do đó có 5! = 5.4.3.2.1 = 120 số. Một cách giải khác là: vị trí đầu của số cần lập có 5 cách chọn, vị trí thứ hai có 4 cách chọn, vị trí thứ ba có 3 cách chọn, vị trí thứ tư có 2 cách chọn và vị trí cuối cùng có 1 cách chọn. Theo quy tắc nhân có: 5.4.3.2.1 = 120 số.

b) Ta coi mỗi số trăm (là số có 3 chữ số) mà mỗi chữ số xuất hiện 1 lần (tức các chữ số khác nhau) là một chỉnh hợp chập 3 từ 5 số 1, 2, 3, 4, 5 (lấy ra 3 chữ số từ 5 chữ số, xếp vào 3 vị trí khác nhau); do đó có $A_5^3 = 5.4.3 = 60$ số. c) Số nghìn là số có 4 chữ số mà mỗi chữ số đều có thể có 5 cách chọn nên có $5^4 = 625$ số.

12. a) Có tất cả 15 nam + 12 nữ = 27 học sinh. Chọn ra 2 người ra hát song ca nên có $C_{27}^2 = \dfrac{27!}{2!25!} = 351$ cách chọn.

b) Chọn ra một đôi nam nữ nên có

$C_{15}^1 C_{12}^1 = 15.12 = 180$ cách.

13.a) Xếp tuỳ ý sẽ có 9! = 9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 362.880 cách.

b) Có 5! cách xếp sách đỏ liên tiếp nhau và 4! cách xếp sách xanh tuỳ ý đồng thời có 5 cách xếp sách xanh trước hoặc sau sách đỏ nên có tất cả: 5.5!.4! = 5!.5! = 120.120 = 14400 cách.

c) Có 5! cách xếp sách đỏ và 4! cách xếp sách xanh liên tiếp nhau, đồng thời có 2! cách xếp sách xanh trước đỏ sau hoặc đỏ trước xanh sau nên có tất cả 2!.5!.4! = 5760 cách.

d) Có 5!.4! cách = 2880 cách xếp sách xanh đỏ xen kẽ nhau.

14. a) Thu, Hà cùng 2 trong 38 người khác lập thành 1 nhóm nên có

$C_{38}^2 = \dfrac{38!}{2!36!} = 703$ cách chia nhóm.

b) Theo câu a) Thu và Hà cùng nhóm thì có C_{38}^2 cách chia; Thu và Hương cùng nhóm cũng có C_{38}^2 cách chia; số cách chia để Thu, Hà và Hương cùng nhóm là C_{37}^1. Do đó để Thu cùng nhóm với Hà hoặc Hương sẽ có: $C_{38}^2 + C_{38}^2 - C_{37}^1 = 1369$ cách chia nhóm.

c) Thu, Hà , Hương, Dung cùng nhóm thì chỉ có 1 cách chia nhóm.

15. a) Có $C_{15}^{4} = 1183$ cách chọn ra 4 người có điểm cao nhất vì ở đây không yêu cầu sắp có thứ tự.

b) Có $A_{15}^{3} = 2730$ cách chọn ra 3 người nhất - nhì - ba.

16. a) Năm người lên tám toa tàu một cách tuỳ ý thì mỗi người có 8 cách chọn toa. Do đó có 8^5 cách lên tuỳ ý.

b) Chỉ có cách chọn 1 trong 8 toa để tất cả cùng lên 1 toa nên có 8 cách (C_{8}^{1}).

c) Lên 5 toa đầu thì mỗi người có 5 cách chọn toa nên có 5^5 cách.

d) Lên 5 toa khác nhau thì sẽ có $A_{8}^{5} = 336$ cách chọn (người thứ nhất có 8 cách, người thứ hai có 7 cách, người thứ ba có 6 cách, người thứ tư có 5 cách và người thứ năm còn 4 cách (4 toa) để chọn).

e) A và B lên cùng toa đầu tức là có 1 cách chọn, còn 3 người kia mỗi người có 8 cách chọn. Do đó có tất cả $1.8.8.8 = 8^3$ cách.

f) A và B lên cùng 1 toa nên có 8 cách chọn (chọn 1 trong 8 toa), còn 3 người kia mỗi người có 8 toa để chọn nên có tất cả $8.8.8.8 = 8^4$ cách.

g) A và B lên cùng một toa nên có 8 cách chọn, 3 người kia không lên toa mà A và B đã lên tức là mỗi người này còn 7 toa khác để chọn. Do đó có tất cả: $8.7.7.7 = 8.7^3$ cách.

17. a) Rút 3 con pích trong 13 con pích nên có C_{13}^{3} cách, tương tự có C_{13}^{2} cách rút ra 2 con cơ và có C_{13}^{1} cách rút ra 1 con rô. Do đó có: $C_{13}^{3}.C_{13}^{2}.C_{13}^{1}$ cách.

b) Có 26 con màu đỏ nên có C_{26}^{2} cách rút ra 2 con màu đỏ. Tương tự có C_{26}^{3} cách rút ra 3 con màu đen. Do đó có: $C_{26}^{2}.C_{26}^{3}$ cách rút.

18. a) Có A_{100}^{4} cách chọn ra 4 người trong 100 người trúng giải nhất - nhì - ba - tư (= 94.109.400 cách).

b) Có 1 cách cho người có vé số 45 trúng giải nhất và A_{99}^{3} cách cho 3 giải khác nên có tất cả $1.A_{99}^{3}$ cách (= 941.094 cách).

c) Có 4 cách để người có vé số 45 trúng một trong các giải nhất - nhì - ba - tư và A_{99}^{3} cách cho 3 người khác trúng giải (trừ một trong các giải mà người vé 45 đã nhận) nên có tất cả $4.A_{99}^{3}$ cách trao giải (= 3764376 cách).

19. Ta có $(x^3 + xy)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^{k}(x^3)^{15-k}(xy)^k = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^{k}x^{45-2k}y^k$. Cần phải có $x^{45-2k}y^k = x^{25}y^{10}$ tức là $45 - 2k = 25$ và $k = 10$. Giải ra được $k = 10$. Do đó hệ số của $x^{25}y^{10}$ là $C_{15}^{10} = 3003$.

20. $\left(\sqrt[4]{2x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^9 = \sum_{k=0}^{9} C_9^k (2x)^{\frac{9-k}{4}}(x)^{\frac{-k}{5}} = \sum_{k=0}^{9} 2^{\frac{9-k}{4}} x^{\frac{9-k}{4}-\frac{k}{5}}$. Ta phải có:

$\frac{9-k}{4} - \frac{k}{5} = 0 \Rightarrow k = 5$ tức số hạng không chứa x là $2.C_9^5 = 252$.

21. Ta có: $C_n^0 = 1$; $C_n^1 = n$; $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ mà $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 121 \Rightarrow n = 15$

Viết $\left(3x^2 + \frac{2}{x}\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^{k}(3x^2)^{15-k}\left(\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^{k}3^{15-k}x^{30-3k}2^k$ .Ta phải có: $30 - 3k = 0 \Rightarrow k = 10$. Do đó số hạng không chứa x là:

$3^5.2^{10}.C_{15}^{10} = 747.242.496$.

22. Ta có $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n = C_n^0\left(x^2\right)^n + C_n^1\left(x^2\right)^{n-1}\left(-\frac{2}{x}\right) + C_n^2\left(x^2\right)^{n-2}\left(-\frac{2}{x}\right)^2 + \ldots$

Theo giả thiết thì $C_n^0 - 2C_n^1 + 4C_n^2 = 97$. Giải ra được $n = 8$.

Ta có $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^8 = \sum_{k=0}^{8} C_8^k \left(x^2\right)^{8-k}\left(-\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{8}(-2)^k C_8^k.x^{16-3k}$.

Ta phải có $16 - 3k = 4 \Rightarrow k = 4$. Do đó hệ số của x^4 là $(-2)^4.C_8^4 = 1120$.

23. Vì tổng các hệ số của khai triển $\left(x^2 + 1\right)^n$ là :

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n = 2048$ nên $n = 11$;

Số hạng thứ (k + 1) của khai triển $(x^2 + 1)^{11}$ là $C_{11}^{k}\, x^{22-2k}$. Số hạng này chứa x^{14} nếu $x^{22-2k} = x^{14}$ hay $22 - 2k = 14$ tức là $2k = 8 \Rightarrow k = 4$. Do đó hệ số của x^{14} là $C_{11}^{4} = 330$.

24. Số hạng thứ (k + 1) của khai triển $\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt{5}\right)^9$ là :

$C_9^k \left(\sqrt[3]{4}\right)^k \left(\sqrt{5}\right)^{9-k} = C_9^k\, 4^{\frac{k}{3}}\, 5^{\frac{9-k}{2}}$, ($0 \le k \le 9$). Để số hạng này là số nguyên $\Leftrightarrow \dfrac{k}{3}$ và $\dfrac{9-k}{2}$ là các số nguyên. Vì k = 0, 1, 2, ..., 9 nên $\dfrac{k}{3}$ nguyên khi k = 3, 6, 9; Trong khi đó $\dfrac{9-k}{2}$ nguyên khi k = 3 và k = 9. Do đó để $\dfrac{k}{3}$ và $\dfrac{9-k}{2}$ nguyên thì k = 3 và k = 9. Với k = 3 thì số hạng cần tìm là $C_9^3\, 4^1.5^3 = 42000$.

Với k = 9 thì số hạng cần tìm là $C_9^9\, 4^3\,.\,5^0 = 64$.

III. PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ BIẾN CỐ

25. Kí hiệu A_{ij} là biến cố xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt i chấm, xúc xắc thứ hai xuất hiện mặt j chấm, thì $\Omega = \left\{A_{ij}\right\}_{i,j=\overline{1,6}}$ sẽ có 36 phần tử.

$A = \left\{\begin{matrix} A_{11}, A_{13}, A_{15}, A_{22}, A_{24}, A_{26}, A_{31}, A_{33}, A_{35}, A_{42}, A_{44}, A_{46} \\ A_{51}, A_{53}, A_{55}, A_{62}, A_{64}, A_{66} \end{matrix}\right\}$ tức là có 18 kết quả thuận lợi.

$B = \left\{A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16}, A_{21}, A_{31}, A_{41}, A_{51}, A_{61}\right\}$ tức B có 11 kết quả thuận lợi.

$C = \left\{A_{16}, A_{26}, A_{36}, A_{46}, A_{56}, A_{61}, A_{62}, A_{63}, A_{64}, A_{65}\right\}$ tức C có 10 kết quả thuận lợi.

26. a) $A = A_1\, \overline{A_2} . \overline{A_3}$

b) $B = A_1\, \overline{A_2} = A_1\, \overline{A_2}\, A_3 \cup A_1\, \overline{A_2}\, \overline{A_3}$

c) $C = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

d) $D = A_1\, A_2 \cup A_1\, A_3 \cup A_2\, A_3 \cup A_1\, A_2\, A_3$

27. Mỗi kết quả của phép thử là chọn ra 2 đề trong 30 đề thi. Do đó Ω có C_{30}^2 kết quả. A là biến cố bốc ra 2 đề thi có ít nhất một đề trung bình thì hoặc là có 1 đề trung bình, 1 đề khó hoặc cả 2 đề là trung bình. Do đó số trường hợp thuận lợi cho A là $C_{10}^1.C_{20}^1 + C_{20}^2 = 390$.

28. Mỗi nhóm có 12 người và phép thử là từ mỗi nhóm chọn ra 1 người để phỏng vấn nên Ω có 12x12 = 144 kết quả. A là biến cố cả 2 người chọn ra là nam nên A có 8.7 = 56 kết quả thuận lợi. B là biến cố cả 2 người chọn ta cùng giới nên B có 8.7 + 4.5 = 76 kết quả thuận lợi.

IV. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

29. a) Xác suất để từ 7 miếng bìa trên đó ghi các chữ N, N, G, G, H, I, Ê sắp ngẫu nhiên được từ NGHIÊNG là $\dfrac{4}{7!}$ (kết quả B) vì : Phép thử là sắp 7 chữ (7 miếng bìa) vào 7 vị trí nên số kết quả có thể có là 7!; số kết quả thuận lợi cho việc sắp được từ NGHIÊNG là 2. 2.1.1.1.1.1 = 4 (vì chữ N đầu tiên có 2 cách chọn, chữ G tiếp theo có 2 cách chọn. mỗi chữ H, I, Ê có một cách chọn; mỗi chữ N, G cuối cùng có 1 cách chọn). Do đó xác suất cần tìm là $\dfrac{4}{7!}$.

b) Xác suất để từ các số 0, 1, 2,..., 9 lập ngẫu nhiên được 1 số có 2 chữ số chia hết cho 16 là $\dfrac{6}{90} = \dfrac{1}{15}$ (kết quả C) vì : Số kết quả có thể có của phép thử là $A_{10}^2 = 90$ (là các số có 2 chữ số từ 10 đến 99). Số kết quả thuận lợi là 6 (gồm các số 16, 32, 48, 64, 80, 96) do đó xác suất là $\dfrac{6}{90} = \dfrac{1}{15}$ (kết quả C).

c) Xác suất để từ các đoạn thẳng có độ dài 1, 3, 5, 7, 9 cm lập được một tam giác là $\dfrac{3}{10}$ (kết qủa C) vì : Số kết quả có thể có là : $C_5^3 = 10$. Số kết quả thuận lợi là 3 (là các tam giác có độ dài các cạnh là 3 – 5 – 7, 3 – 5 – 9, 5 7 – 9 để tổng 2 cạnh lớn hơn một cạnh). Do đó xác suất cần tìm là $\frac{3}{10}$ (kết quả C).

30. Ta có P $(A \cup B)$ = P(A) + P(B) − P(AB) nên $P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ và

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

31. Phép thử là chọn 10 số trong 40 số nên số kết quả có thể có là C_{40}^{10}.

a) Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là C_{20}^{10} (vì chọn ra 10 số trong 20 số lẻ) do đó $P(A) = \frac{C_{20}^{10}}{C_{40}^{10}} = 0{,}000218$.

b) Số các số chia hết cho 4 là 10 số (gồm 4, 8, 12, 16, 20,..., 40) nên số kết quả thuận lợi cho B là $C_{10}^{5}.C_{30}^{5}$ (chọn 5 số chia hết cho 4 trong 10 số chia hết cho 4 và chọn 5 số không chia hết cho 4 trong 30 số còn lại), do đó :

$P(B) = \frac{C_{10}^{5}.C_{30}^{5}}{C_{40}^{10}} = 0{,}042365$.

32. Phép thử là cùng lúc chọn ra 5 người trong 12 người nên số kết quả có thể có đồng khả năng là $C_{12}^{5} = 792$. A là biến cố chọn ra 5 người trong đó có 3 nam và 2 nữ nên số kết quả thuận lợi cho A là $C_7^3.C_5^2 = 350$. Do đó $P(A) = \frac{350}{792} = 0{,}4419$.

33. a) Gọi A là biến cố cả 2 bi lấy ra đều có màu trắng. Phép thử là lấy có thứ tự 2 bi từ hộp 10 bi nên số kết quả có thể có đồng khả năng là $A_{10}^{2} = 90$.

Số kết quả thuận lợi cho A là 4.3 = 12. Do đó $P(A) = \frac{12}{90} = \frac{2}{15} \approx 0{,}1333$.

b) Gọi B là biến cố viên bi lấy ra sau là màu đỏ thì viên bi lấy ra trước hoặc có màu đỏ hoặc có màu trắng nên số kết quả thuận lợi cho B là

6.5 + 4.6 = 54. Do đó $P(A) = \frac{54}{90} = \frac{3}{5} = 0{,}60$.

34. Phép thử là chia 80 học sinh thành 20 nhóm tức là lấy ra 4 học sinh trong 80 học sinh ra thành 1 nhóm nên có $n = C_{80}^{4}$ cách chia. a) A là biến cố Hoa cùng nhóm với Lan thì $|A| = C_{78}^{2}$ (xem bài tập 14. II) nên $P(A) = \frac{C_{78}^{2}}{C_{80}^{4}} = 0{,}0019$. b) B là biến cố Hoa cùng nhóm với Lan hoặc Nhài thì B có số kết quả thuận lợi là $|B| = C_{78}^{2} + C_{78}^{2} - C_{77}^{1}$. Do đó $P(B) = \frac{|B|}{C_{80}^{4}} \approx 0{,}0037$. c) C là biến cố 4 bạn Hoa - Lan - Nhài - Cúc cùng nhóm thì $|C| = 1$. Do đó $P(C) = \frac{1}{C_{80}^{4}} \approx 0{,}00000063$.

35. Phép thử là gieo đồng thời 2 con xúc xắc nên số kết quả có thể có đồng khả năng là 6x6 = 36. Ta có $|A| = 18$ (xem bài tập 25.III), $|B| = 11$, $|AB| = 6$. Do đó

$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{11}{36}$; $P(AB) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; $P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = \frac{5}{6}$ và

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{18}{36} + \frac{11}{36} - \frac{6}{36} = \frac{23}{36}$;

36. Phép thử là chọn ra 3 học sinh trong 30 học sinh nên $n = C_{30}^{3}$.

a) A là biến cố cả 3 học sinh chọn ra đều là học sinh trung bình nên $|A| = C_{10}^{3}$.

Do đó $P(A) = \frac{C_{10}^{3}}{C_{30}^{3}} = 0{,}0296$.

b) B là biến cố ‘có ít nhất 1 học sinh giỏi’ thì B có số kết quả thuận lợi là $|B| = C_4^1.C_{26}^2 + C_4^2.C_{26}^1 + C_4^3.C_{26}^0 \Rightarrow P(B) = \frac{|B|}{n} = 0{,}3596$.

c) C là biến cố có đúng 1 học sinh khá thì $|C| = C_9^1.C_{21}^2 \Rightarrow P(C) = \frac{|C|}{n} = 0{,}4655$.

37. Gọi A_k (k = 1, 2, 3) là biến cố động cơ thứ k hoạt động tốt. Ta có $P(A_1) = 0{,}7$; $P(A_2) = 0{,}8$; $P(A_3) = 0{,}9$.

a) A là biến cố cả 3 động cơ đều chạy tốt thì $A = A_1A_2A_3$. Do các A_k độc lập nên

$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3) = 0,7.\ 0,8.\ 0,9 = 0,504.$

b) B là biến cố có ít nhất 1 động cơ chạy tốt thì $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Do đó

$$P(B) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$
$$= 0,7 + 0,8 + 0,9 - 0,7\ .\ 0,8 - 0,7\ .\ 0,9 - 0,8\ .\ 0,9 + 0,7\ .\ 0,8\ .\ 0,9 = 0,994.$$

(Ta có thể tính $P(B) = 1 - P(\overline{B})$ với $\overline{B} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} = \overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}$

nên $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}) = 1 - 0,3\ .\ 0,2\ .\ 0,1 = 0,994$).

c) C là biến cố có 2 động cơ chạy không tốt thì

$$C = A_1 . \overline{A_2} . \overline{A_3} \cup \overline{A_1} . A_2 . \overline{A_3} \cup \overline{A_1} . \overline{A_2} . A_3$$

Do các số hạng xung khắc và các A_k độc lập nên

$$P(C) = P(A_1).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}).P(A_2).P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(A_3)$$
$$= 0,\ 7.\ 0,2\ .0,1 + 0,3\ .0,8\ .0,1 + 0,3\ .0,2\ .0,9 = 0,092.$$

38. a) Số tất cả kết quả có thể có của phép thử là 36; số thuận lợi cho A là 14, cho B là 18 và cho AB là 10 nên $P(A) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$; $P(B) = \frac{18}{36}$; $P(AB) = \frac{10}{36}$ suy ra $P(AB) \neq P(A)P(B)$. Do đó A và B không độc lập với nhau.

b) Ta có $P(AB) = \frac{10}{36} \neq 0$ nên A và B không xung khắc.

c) Ta có $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{14}{36} + \frac{18}{36} - \frac{10}{36} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$.

39. Gọi A là biến cố thắng ít nhất 1 ván thì $\overline{A}$ là biến cố không thắng ván nào. Do các ván độc lập nhau nên $P(\overline{A}) = (0,6)^n$ với n là số ván cần chơi.

Ta có $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (0,6)^n \geq 0,95$ hay $(0,6)^n \leq 0,05$. Từ đó ta xác định được $n = 6$ (vì $(0,6)^6 < 0,05$ còn $(0,6)^5 > 0,05$).

40. Gọi A là biến cố học sinh đó chọn phương án đúng cho mỗi câu hỏi thì

$P(A) = \frac{1}{4}$ (vì 4 phương án là như nhau) và $P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

a) B là biến cố trả lời đúng 3 câu (trong 5 câu) thì $P(B) = C_5^3 (\frac{1}{4})^3 (1 - \frac{1}{4})^2$ (vì các câu trả lời độc lập nhau, xác suất trả lời đúng mỗi câu là $P(A) = \frac{1}{4}$ và xác suất trả lời sai mỗi câu là $P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$). Do đó $P(B) = 10. \frac{9}{1024} = \frac{45}{512}$.

b) C là biến cố trả lời đúng ít nhất 1 câu thì $\overline{C}$ là biến cố trả lời sai cả 5 câu nên

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - (P(\overline{A}))^5 = 1 - (\frac{3}{4})^5 = 1 - \frac{243}{1024} = \frac{781}{1024}.$$

V. PHÂN PHỐI XÁC SUẤT CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

41. Ta có: $2a^2 + 3a^2 + 4a = 1$ hay $5a^2 + 4a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{5} = 0,2$

Do đó ta có bảng phân phối của X là:

X	1	2	3
P	0,08	0,12	0,8

$EX = 1.0,08 + 2.0,12 + 3.0,8 = 2,72.$

$DX = 1^2.0,08 + 2^2.0,12 + 3^2.0,8 - 2,72^2 = 0,362$

42. $X \approx H(10;\ 3;\ 3)$ tức là X có bảng phân phối xác suất:

X	0	1	2	3
P	$\frac{35}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{1}{120}$

$EX = \frac{3.3}{10} = \frac{9}{10}$ (xem phân phối siêu bội).Tương tự: $Y \approx H\ (10;\ 2;\ 3)$; $EY = \frac{6}{10}$ và $Z \approx H\ (10;\ 5;\ 3)$; $EZ = \frac{15}{10}$.

43. a)

X	1	2	3	4	5
P	0,6	0,24	0,096	0,0384	0,0256

b) $EX = 1.0,6 + 2.0,24 + 3.0,096 + 4.0,0384 + 5.0,0256 = 1,6496$. Do đó có thể coi về trung bình anh ta phải chơi 1,65 ván (thực tế phải chơi 2 ván).

44. a) X có phân phối nhị thức B(4; 0,4) với bảng phân phối

X	0	1	2	3	4
P	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256

(Vì $p_k = P(X = k) = C_4^k .0,4^k.0,6^{4-k}$ với k = 0, 1, 2, 3, 4).

b) Hàm phân phối của X là:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 0,1296 & 0 < x \le 1 \\ 0,4752 & 1 < x \le 2 \\ 0,8208 & 2 < x \le 3 \\ 0,9744 & 3 < x \le 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

c) $P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,1296 + 0,3456 + 0,3456$

$= 0,8208$.

d) EX = 1,6. Do đó về trung bình phải chờ 1,6 x1phút = 1,6 phút tức phải chờ 1 phút 36 giây.

45. a) X có bảng phân phối xác suất là:

X	0	700.000
P	0,99	0,01

b) EX = 7.000đ. Do đó về trung bình mỗi lần chơi anh ta lỗ (thua) 3000đ (vì vé 10.000đ).

46. Ta có $p_3 = 1 - 0,5 - 0,3 = 0,2$. $EX = 8 = 3.0,5 + 5.0,3 + x_3.0,2$ nên ta được $x_3 = 25$.

47. Ta có:

$- 1.p_1 + 0.p_2 + 1.p_3 = 0,1 \Rightarrow - p_1 + p_3 = 0,1$; $1^2.p_1 + 0^2.p_2 + 1^2.p_3 - 0,1^2 = 0,89$

$\Rightarrow p_1 + p_3 = 0,9$. Giải ra được $p_3 = 0,5$; $p_1 = 0,4$ và $p_2 = 0,1$.

48. a) P(X =3) = 1– 0,2 – 0,15 – 0,4 = 0,25. EX = 1.0,2 + 2.0,15 + 3.0,25 + 4.0,4 = 2,85. $DX = 1^2.0,2 + 2^2.0,15 + 3^2.0,25 + 4^2.0,4 - 2,85^2 = 1,3275$.

b) Hàm phân phối của X là:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ 0,2 & 1 < x \le 2 \\ 0,35 & 2 < x \le 3 \\ 0,60 & 3 < x \le 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

c) $P(1,8 \le X < 3,2) = F(3,2) - F(1,8) = 0,60 - 0,2 = 0,4$;

$P(X>2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - F(2) - P(X=2) = 1 - 0,2 - 0,15 = 0,65$; hoặc tính trực tiếp: $P(1,8 \le X < 3,2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0,15 + 0,25 = 0,4$;

$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0,25 + 0, 40 = 0,65$.

49. a) $X \approx B(30; 0,6)$ EX = 30.0,6 = 18 tức là về trung bình cứ 30 học sinh lớp 11 sẽ có 18 học sinh khá giỏi.

b) Tính được EY = 6.0,15 + 7.0,2 + 8.0,4 + 9.0,2 + 10.0,05 = 7,8. $P(Y \ge 8) = P(Y = 8) + P(Y = 9) + P(Y = 10) = 0,4 + 0,2 + 0,05 = 0,65$ tức là khả năng đạt điểm giỏi (≥ 8 điểm) của học sinh khá giỏi là 65%.

Chương III.

I. DÃY SỐ.

1. a) Học sinh tự chứng minh;

b) Với n = 1 đẳng thức là đúng vì vế trái khi đó bằng sinx,

$$VP = \frac{\sin\frac{1.x}{2}.\sin\frac{(1+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \sin x = VT.$$ Giả sử đẳng thức đúng với n = k

(k≥ 1), tức là giả sử ta có :

$$\sin x + \sin 2x + ... + \sin kx = \frac{\sin\frac{k.x}{2}.\sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$, khi đó

$$\sin x + \sin 2x + ... + \sin kx + \sin(k+1)x = \frac{\sin\frac{k..x}{2}.\sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} + \sin(k+1)x$$

$$= \frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}\left[\sin\frac{kx}{2} + 2\cos\frac{(k+1)x}{2}\sin\frac{x}{2}\right]}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{(k+1).x}{2}.\sin\frac{(k+2)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

tức là đẳng thức vẫn đúng $\Rightarrow$ đpcm.

c) Học sinh tự chứng minh.

d) Với n = 1 đẳng thức đúng vì có $1 = \frac{1^2.(1+1)^2}{4}$. Giả sử đẳng thức đúng với n = k (k ≥ 1) tức là giả sử ta có $A_k = 1^3 + ... + k^3 = \frac{k^2.(k+1)^2}{4}$ .Khi đó với n = k + 1 ta có $A_{k+1} = 1^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = A_k + (k+1)^3 = \frac{k^2.(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$

$= \frac{(k+1)^2\left[k^2 + 4(k+1)\right]}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$, tức đẳng thức đúng khi n = k+1.

Vậy đẳng thức đúng với $\forall v \in N^*$.

2. Với n = 0 ta có $11^2 + 12^1 = 121 + 12 = 133$ chia hết cho 133. Giả sử khẳng định trên đúng với n = k (k ≥ 0), tức là ta có $11^{k+2} + 12^{2k+1}$ chia hết cho 133. Với n = k + 1 ta có : $11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11.11^{k+2} + 12^{2k+1}.12^2 = 11.11^{k+2} + (11 + 133).12^{2k+1} = 11.(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133.12^{2k+1}$ chia hết cho 133 vì $(11^{k+2} + 12^{2k+1})$ chia hết cho 133 theo giả thiết. Như vậy khẳng định đúng khi n = k +1, suy ra khẳng định đúng với $\forall n \in N$

3. a) Với n = 2 ta có : $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, khẳng định là đúng. Giả sử khẳng định đúng nới n = k (k ≥ 2), tức là ta có: $A_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k} > \frac{1}{2}$. Ta hãy chứng minh rằng khi đó khẳng định này cũng đúng với n = k +1. Với n = k + 1 ta có $A_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = A_k + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = A_k + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} > \frac{1}{2}$. Vì theo giả thiết thì $A_k > \frac{1}{2}$ còn số hạng thứ hai dương.

b) Học sinh tự chứng minh tương tự như câu a.

c) Ta thấy với n = 6 có 36 > 4.6 + 11 = 35, tức là khẳng định đúng. Giả sử khẳng định đúng với n = k (k ≥ 6), tức là ta có $k^6 > 4k + 11$. Khi đó với n = k +1 ta có: $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 > 4k + 11 + 2k + 1 = 4(k+1) + 11 + 2k - 3 > 4(k+1) + 11$ vì 2k − 3 > 0 với k ≥ 6, vậy khẳng định là đúng. Như vậy khẳng định đúng với mọi n ≥ 6.

4. a) − 2, 4, − 6, 8, − 10.

b) 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{8}{27}$, $\frac{81}{256}$, $\frac{1024}{3125}$.

c) 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{5}$.

5. a) 2, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$, 4, $\sqrt{19}$

b) 1, 3, 5, 5, 5, 5.

c) 2, $\frac{5}{4}$, $\frac{17}{16}$, $\frac{65}{64}$, $\frac{257}{256}$, $\frac{1025}{1024}$.

d) 10, 7, 6, − 5, 16, −37 .

6. a) Ta thấy $u_2 = 2u_1$; $u_3 = 2u_2 = 2.2.3 = 2^2.3$. Dự đoán $u_n = 2^{n-1}.3$. Ta chứng minh công thức này bằng quy nạp. Với n = 1 ta có $u_1 = 2^{1-1}.3 = 3$, công thức này đúng. Giả sử công thức đúng với n = k (k ≥ 1), tức là $u_{k+1} = 2u_k = 2.2^{k-1}3 = 2^k.3$. Vậy công thức đúng với mọi $n \in N^*$ ta có $u_n = 3.3^{n-1}$

b) Học sinh hãy chứng minh rằng $u_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$, $\forall n \in N^*$.

7. a) Ta xét hiệu $(u_{n+1} - u_n) = 3(n+1)^2 - 5(n+1) - 9 - 3n2 + 5n + 9 = 6n - 2 > 0$, $\forall n \in N^*$. Vậy dãy số là tăng.

b) Đáp số: Dãy số không đơn điệu.

c) Dãy số là tăng vì $(u_{n+1} - u_n) = 3 + [\sin(n+1) - \sin n] > 0$.

d) Dãy số là giảm vì $(u_{n+1} - u_n) = -\dfrac{5}{(7n+10)(7n+3)} < 0$.

e) Dãy số không đơn điệu vì $(u_{n+1} - u_n) = (-1)^{n+1}\,2$ âm khi n là chẵn và dương khi n lẻ.

8. a) Dãy số bị chặn, vì dễ dàng thấy rằng $0 < u_n < 3$.

b) Ta có $|u_n| = |3\sin 4n + 4\cos n| \le |3\sin 4n| + |4\cos n| \le 3 + 4 = 7$, tức là $-7 \le u_n \le 7$. Vậy dãy số bị chặn.

c) Dãy số bị chặn vì $|u_n| \le 3$.

d) Dãy số bị chặn dưới, vì 3n – 10 > – 7, $\forall n \in N^*$. Ta hãy chứng minh rằng dãy số không bị chặn trên. Giả sử A là số bất kì (lớn tuỳ ý), khi đó ta chỉ lấy số $k > \dfrac{A+10}{3}$ ta sẽ được 3k – 10 > A

9. a) Ta chứng minh dãy số là tăng bằng phương pháp quy nạp. Với n = 1 ta có $u_2 = \sqrt{10+8u_1} = \sqrt{10+8.3} = \sqrt{34} > 3 = u_1$, tức là $u_2 > u_1$. Giả sử khẳng định đó đúng với n = k (k ≥ 1), tức là $u_{k+1} > u_k$. Khi đó với n = k + 1 ta có $u_{k+2} = \sqrt{10+8u_{k+1}} > \sqrt{10+8u_k} = u_{k+1}$. Vậy $u_{n+1} > u_n$ với $\forall n \in N^*$. Bây giờ ta hãy chứng minh dãy số bị chặn trên bởi 10 cũng bằng quy nạp.Với n = 1 ta có $u_1 = 3 < 10$ (khẳng định là đúng). Giả sử khẳng định đúng với n = k (k ≥ 1), tức là $u_k < 10$. Khi đó với n = k + 1 ta có $u_{k+1} = \sqrt{10+8u_k} < \sqrt{10+8.10} = \sqrt{90} < \sqrt{100} = 10$ (vì theo giả thiết $u_k < 10$), vậy khẳng định cũng đúng với n = k +1. Do đó $u_n < 10$ với $\forall n \in N^*$.

b) Học sinh chứng minh như câu a ở trên bằng quy nạp hãy chứng minh $u_n < a$ (lưu ý rằng 0 < a < 1).

10. Câu trả lời đúng là B, vì với n = 2 thì $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ là lẻ không thể chia hết cho 2, 4, và 6.

11. Câu trả lời đúng là C. Thật vậy, A) sai vì chưa biết quy luật xác định dãy số đó, B) sai vì cách viết như vậy là đối với dãy hữu hạn, D) sai vì nếu u_n = 2n + 1 thì $u_1 = 3$, chứ không phải bằng 1.

12. Ta có thể viết rất nhanh cả 10 số hạng đầu tiên để khẳng định câu trả lời đúng là B.

II. CẤP SỐ CỘNG

13. a) $u_{20} = u_1 + 19d = 2\sqrt{5} + 3 + 19.(1 - \sqrt{5}) = 22 - 17\sqrt{5}$.

b) Ta có: $u_1 = 4$; d = 6,5 – 4 = 2,5 $\Rightarrow u_{30} = u_1 + 29d = 4 + 29.2{,}5 = 76{,}5$.

c) Đáp số: 9,9.

d) Ta có $d = 2 - (\sqrt{2}+1)$; $u_1 = 1 + \sqrt{2}$.

Theo công thức có đáp số : $14 - 12\sqrt{2}$.

14. a) Theo công thức ta có $u_1 + 3d = 20$; và $u_1 + 9d = 72$. Lập hệ phương trình với hai ẩn là u_1 và d. Giải hệ đó ta có kết quả $d = \dfrac{26}{3}$, $u_1 = -6$.

b) Đáp số $u_1 = -10{,}2$; d = 2,2.

c) Ta có $u_3 = u_1 + 2d$; $u_2 = u_1 + d$; $u_7 = u_1 + 6d$. Thay u_7, u_3 vào phương trình đầu ta được $4d = 8 \Leftrightarrow d = 2$. Từ đó và từ phương trình thứ hai ta có:

$(u_1+2)(u_1 + 12) = 75 \Leftrightarrow u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = 3 \\ u_1 = -17 \end{array}\right.$. Vậy ta có d = 2; $u_1 = 3$ và d = 2; $u_1 = -17$.

d) Hướng dẫn: Biểu diễn u_7, u_{15}, u_4, u_{12} qua u_1 và d, rồi thay chúng vào các phương trình. Khi đó ta được một hệ phương trình bậc hai với hai ẩn là u_1 và d. Từ phương trình đầu được $u_1 = 30 - 10d$; thay vào phương trình hai ta có phương trình

$$5d^2 - 36d + 63 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 3 \\ d = \dfrac{21}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d = 3; u_1 = 0 \\ d = \dfrac{21}{5}; u_1 = -12 \end{array}\right..$$

15. Học sinh tự chứng minh, lưu ý là phải chứng minh cả hai chiều. Có thể áp dụng tính chất các số hạng của cấp số cộng.

16. Giả sử ta có ÷ u_1, u_1 + d, u_1 + 2d, u_1 + 3d. Theo giả thiết thì $u_1 = (u_1+d)^2 + (u_1+2d)^2 + (u_1+3d)^2 \Leftrightarrow 3u_1^2 + (12d - 1)\,u_1 + 14d^2 = 0$. Muốn phương trình bậc hai ẩn u_1 (học sinh có thể tạo thành phương trình bậc hai ẩn d) có nghiệm nguyên thì $\Delta \geq 0$ và Δ là một số chính phương, tức là $\Delta = -24d^2 - 24d + 1 \geq 0$ và d nguyên sao cho Δ là số chính phương. Bằng cách xét dấu của tam thức ta có $-1 \leq d \leq 0$, nhưng d = 0 loại, chỉ còn d =1. Khi đó có $3u_1^2 - 13u_1 + 14 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 2$ và $u_1 = \frac{7}{3}$ (loại vì không nguyên). Vậy bốn số phải tìm là: 2, 1, 0, – 1 .

17. Do ÷ a, b, c, nên 2b = a+ c, vậy $p = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{3}{2}b$. Theo công thức ta có: S = pr và $S = \frac{abc}{4R}$, từ đó $R = \frac{abc}{4S}$ và $r = \frac{S}{p}$. Do đó $6Rr = 6\frac{abc}{4S}.\frac{S}{p} = ac$ (đpcm).

18. Hướng dẫn: Viết $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, áp dụng định lí hàm số sin và định lí hàm số cosin.

19. $A + B + C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A + B = \frac{\pi}{2} - C \Rightarrow \cot(A + B) = \tan C$. Từ công thức cộng suy ra $\frac{\cot A.\cot B - 1}{\cot A + \cot B} = \frac{1}{\cot C} \Rightarrow$ cotA.cotB.cotC = cotA + cotB +cotC. Vì có ÷ cotA, cotB, cotC nên suy ra 2cotB = cotA + cotB $\Rightarrow$ cotA.cotB.cotC = 3cotB, suy ra cotA.cotC = 3.

20. Hướng dẫn: Từ điều kiện đã cho, lập hệ hai phương trình hai ẩn số u_1 và d. Đáp số: Bốn số phải tìm là ÷ – 3, 0, 3, 6 và ÷ 6, 3, 0, – 3.

21. Theo cộng thức số hạng tổng quát của một cấp số cộng là $u_9 = u_1 + 8d \Leftrightarrow 50 = 6 + 8d \Leftrightarrow d = 5{,}5$. Vậy bảy số phải tìm là: 11; 5; 16; 22,5; 28; 33,5; 39; 44,5;

22. Ta có: d = – 1 – (– 7) = 6 và $u_1 = -7$. Tìm n từ công thức tổng n số hạng đầu

$$S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n - 1)d] = 112$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 - 10n - 112 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 8 \\ n = -\frac{14}{3} \end{array}\right. \quad (n = \frac{-14}{3} \text{ loại});$$

Vậy $x = u_8 = u_1 + 7d = -7 + 7.6 = 35$.

23. Nếu x = y thì hệ có một nghiệm $x = y = -\frac{1}{2}\ \forall m$. Nếu $x \neq y$ thì hệ tương đương với hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy - m = 0 & (1) \\ x + y = -1 & (2) \end{cases}$. Từ (2) ta có y = – 1 – x, thế vào (1) ta được phương trình : $x^2 + x - (m - 1) = 0$ (3). Gọi $f(x) = x^2 + x - (m - 1)$ và x_1 và x_2 là nghiệm của (3). Khi đó ta có $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{1}{2}$ (trùng với nghiệm x_3 của hệ), từ đó suy ra hệ có ba ngiệm $x_1, x_2, x_3 \left(x_3 = -\frac{1}{2}\right)$ lập thành một cấp số cộng trong $|x_1|, |x_2| > 1$, do đó phương trình (3) phải có hai nghiệm đối xứng nhau qua $x_3 = -\frac{1}{2}$ và $|x_1|, |x_2| > 1$ có nghĩa là $\begin{cases} f(1) < 0 \\ f(-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(m - 1) < 0 \\ 3 - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$.

24. Từ hai hệ thức đầu ta tìm được $d = \frac{3}{2}$ và $u_1 = \frac{5}{2}$ (học sinh tự giải). Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n - 1)d$, tức là 23,5 = 2,5 + (n – 1).1,5 $\Leftrightarrow$ n = 15. Vậy câu trả lời đúng là C).

25. Câu trả lời đúng là E), vì từ điều kiện ta tìm ra ngay d = 4 và từ đó có $u_1 = 3$.

26. Câu trả lời đúng là A), vì từ điều kiện có : 4d = 8.

27. Câu trả lời đúng là B). Thật vậy, từ hệ phương trình ta lập phương trình tổng tích để tìm u_3 và u_9 :

$X^2 - 6X + \frac{135}{16} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X_1 = \frac{9}{4} \\ X_2 = \frac{15}{4} \end{array}\right.$. Do điều kiện d > 0 suy ra $u_9 > u_3$

nên ta lấy $u_3 = \frac{9}{4}$ và $u_9 = \frac{15}{4}$. Từ đó $u_9 - u_3 = 6d = \frac{15}{4} - \frac{9}{4} = \frac{6}{4} \Rightarrow d = \frac{1}{4}$.

Từ đó tìm được $u_1 = \frac{7}{4}$. Theo công thức tổng n số hạng đầu tiên ta có $S_{16} = 58$

28. Từ phương trình thứ hai ta có $d = u_1 + \frac{1}{2}$. Thay d vào phương trình thứ nhất ta được phương trình bậc hai đối với u_1 : $\left(2u_1 + \frac{1}{2}\right)(5u_1 + 2) = \frac{27}{4}$

$\Leftrightarrow 40u_1^2 + 26u_1 - 23 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_1 = -\frac{23}{20} \end{cases}$. Vậy câu trả lời đúng là E).

III. CẤP SỐ NHÂN

29.a) Ta có $\frac{u_6}{u_4} = \frac{u_1 q^5}{u_1 q_3} = q^2 = \frac{192}{48} \Rightarrow q = \pm 2$. Với q= 2, có $u_1 = \frac{u_4}{q^3} = \frac{48}{8} = 6$,

$S_{10} = \frac{u_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = 6(2^{10} - 1) = 6138$. Với q = 2, có $u_1 = -6$,

$S_{10} = \frac{-6\left[(-2)^{10} - 1\right]}{-2 - 1} = 2.1023 = 2046$.

b) Đáp số: q = 2; $u_1 = 12$, $S_{10} = 12276$.

c) Áp dụng công thức số hạng thứ n của cấp số nhân ta có:

$\begin{cases} u_1 - u_1q^2 + u_1q^4 = 65 \\ u_1 + u_1q^6 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 - q^2 + q^4) = 65 \\ u_1(1 + q^6) = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q^6) = 325 \\ 1 + q^2 = 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} q^2 = 4 \\ u_1 = \frac{325}{1 + q^6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \pm 2 \\ u_1 = 5 \end{cases}$. Với q = 2 và $u_1 = 5$ có $S_{10} = 5(2^{10} - 1) = 5115$.

Với q = – 2 có $S_{10} = \frac{5(2^{10} - 1)}{-3} = 1705$. Vậy có kết quả q = 2 và $u_1 = 5$; $S_{10} = 5115$ và q = – 2; $u_1 = 5$; $S_{10} = 1705$.

30. a) Ta có $u_5 = 512$ và $u_1 = 2$ tức là $2.q^4 = 512 \Rightarrow q^4 = 256 \Rightarrow q = \pm 4$. Với q = 4 ta có ÷÷ 2, 8, 32, 128, 256, 512; với q = – 4 ta có ÷÷ 2, – 8, 32, – 128, 512. b) Đáp số ÷÷ 512, $\frac{256}{\sqrt[5]{16}}$, $\frac{64}{\sqrt[5]{8}}$, $\frac{16}{\sqrt[5]{4}}$, $\frac{4}{\sqrt[5]{2}}$, 1. c) Từ đầu bài ta lập được hai phương trình: $u_1(1 + q + q^2) = 168$ và $u_1 q^3(1 + q + q^2) = 21$. Lấy phương trình sau chia phương trình trước được $q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$; từ đó có $u_1 = 96$ và có ÷÷ 96, 48, 24, 12, 6, 3,.

31. Đáp số: Năm số là 6, 12, 24, 48, 96 hay – 6, 12, – 24, 48, – 96.

32. Dân số của tỉnh được tính theo công thức số hạng của cấp số nhân với $u_1 = 1{,}4$ (triệu người), d = 1 + 2% = 1,02. Như vậy ta phải tính u_5 và u_{10}. Ta có $u_5 = u_1.q^4 = 1{,}4.1{,}02 \approx 1{,}52$; $u_{10} = u_1.q^9 = 1{,}4.1{,}02^9 \approx 1{,}67$. Vậy dân số của tỉnh sau 5 năm ≈ 1,52 triệu người và sau 10 năm ≈ 1,67 triệu người.

33. Hướng dẫn: Các số a và b thoả mãn hai hệ thức 2a = 1 + b và $a = b^2$. Từ đó ta có: $a^4 = (2a - 1)^2 \Rightarrow a^2 = \pm(2a - 1) \Rightarrow$ có hai phương trình bậc hai ẩn a là $a^2 - 2a + 1 = 0$ và $a^2 + 2a - 1 = 0$. Giải chúng ta có đáp số là ba cặp số (a; b): (1; 1): $(-1 + \sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2})$ và $(-1 - \sqrt{2}; -3 - 2\sqrt{2})$.

34. Giả sử phải tìm ÷÷ u_1, u_2, u_3. Theo bài có : $u_1 + u_2 + u_3 = 21$ và ÷÷ u_1, $u_2 - 1$, $u_3 + 1$. Theo tính chất của cấp số cộng thì $2u_2 = u_1 + u_3$

$\Rightarrow u_1 + u_2 + u_3 = 3u_2 = 21 \Rightarrow u_2 = 7$. Theo tính chất của cấp số nhân ta có:

$(u_2-1)^2 = u_1(u_3+1)$ (*). Do $u_2 = 7$ và $u_1 + u_3 = 14 \Leftrightarrow u_3 = 14 - u_1$ nên khi thay vào (*) ta có $u_1(15 - u_1) = 36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = 12 \\ u_1 = 3 \end{array}\right.$. Như vậy ta có hai cấp số cộng sau thoả mãn yêu cầu : ÷ 12, 7, 2 và ÷ 3, 7, 11.

35. a) Gọi công bội của cấp số nhân là q và một cạnh là x thì hai cạnh kia là $\dfrac{x}{q}$ và xq (q, x > 0). Theo đề bài ta có $\dfrac{x}{q}.x.qx = x^3 = 27 \Rightarrow x = 3$.

Mặt khác $S_{tq} = 2\left(\dfrac{9}{q} + 9 + 9q\right) = 9.6 \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{1}{q} + 1 + q\right) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{q} + q = 2 \Rightarrow q = 1$.

Vậy ba cạnh của hình hộp chữ nhật là 3, 3, 3.

b) Thực hiện như câu a ta có phương trình:

$$2\left(\frac{9}{q} + 9 + 9q\right) = 9a \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = a \Leftrightarrow 2q^2 + (2 - a)q + 2 = 0.$$

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0$ tức là $(2 - a)^2 - 16 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - a \geq 4 \\ 2 - a \leq -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \leq -2 \\ a \geq 6 \end{array}\right.$$ ($a \leq -2$ loại) ; Đáp số: $a \geq 6$;

36. Hướng dẫn: Gọi các cạnh của tam giác là $a < xq < xq^2$ rồi áp dụng tính chất về tổng hai cạnh của tam giác so với cạnh còn lại.

37. Gọi ba cạnh của tam giác là $a \leq b \leq c$ (có các góc đối diện là $A \leq B \leq C$), theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Từ đó $b^2 = ac$. Theo định lí hàm số cosin:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Leftrightarrow ac = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Leftrightarrow \cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - ac}{ac}$

$= \dfrac{a^2 + c^2}{ac} - \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{2} \Rightarrow B \leq 60^0$ (Vì $a^2 + c^2 \geq 2ac$). Từ đó $A \leq B \leq 60^0$ (đpcm).

38. Giả sử có ÷÷ a, b, c. Gọi q là công bội khi đó theo đầu bài

$a + aq + aq^2 = a(1 + q + q^2) = 26$ (1). Mặt khác có ÷ a + 1, aq + 6, aq² + 3, Theo tính chất của cấp số cộng: $2(aq + 6) = (a + 1) + aq^2 + 3 \Leftrightarrow a(q^2 - 2q + 1) = 8$ (2).

Lấy (2) chia cho (1) ta có: $\dfrac{q^2 - 2q + 1}{q^2 + q + 1} = \dfrac{8}{26} \Leftrightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 3 \\ q = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Với q = 3 từ (2) có a = 2 và có ÷÷ 2, 6, 18. Với $q = \dfrac{1}{3}$ cũng từ (2) có a = 18 và có ÷÷ 18, 6, 2.

39. Giả sử cấp số cộng ÷ 5, u_2, u_3. Theo đầu bài ta có ÷÷ 5, $u_2 - 10$, u_3. Theo tính chất của cấp số cộng và cấp số nhân ta có hai hệ thức sau: $2u_2 = u_3 + 5 \Leftrightarrow$ $u_3 = 2u_2 - 5$ (1) và $(u_2 - 10)^2 = 5u_3 \Leftrightarrow u_3 = \dfrac{(u_2 - 10)^2}{5}$. Từ (1) và (2) ta có

$$2u_2 - 5 = \frac{(u_2 - 10)}{5} \Leftrightarrow u_2^2 - 30u_2 + 125$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u_2 = 25 & \Rightarrow \text{có } \div 5, 25, 45 \text{ và } \div\div 5, 15, 45 \\ u_2 = 5 & \Rightarrow \text{có } \div 5, 5, 5 \text{ và } \div\div 5, -5, 5 \end{array}\right.$$

40. Câu trả lời đúng là D), vì cấp số nhân có $u_1 = 1$, $q = \dfrac{1}{2}$; $u_{10} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^9 = 2^{-9}$.

41. Câu trả lời đúng là E). Có thể loại các trường hợp khác do tổng của hai số hạng đầu $\neq \dfrac{4}{9}$.

42. Câu trả lời đúng là A) vì $S_8 = \dfrac{2.(2^8 - 1)}{-3} = -170$.

43. Câu trả lời đúng là E). Thật vậy, thay b = aq,

$c = aq^2$, $d = aq^3$ vào phương trình, sau đó rút gọn cho a ta có phương trình

$x^3 + qx^2 + q^2x + q^3 = 0$. Ta thay các giả thiết vào thì chỉ có x = – q là thoả mãn ∀ q.

Chương IV.

I. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

1.a) $\lim(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim\dfrac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=$

$=\lim\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{2}$.

b) Ta có $\left|\dfrac{2n\sin n}{n^3+1}\right|<\dfrac{2n}{n^3+1}\to 0$ nên $\lim\dfrac{2n\sin n}{n^3+1}=0$

c) $\lim(2-\dfrac{(1)^n}{n+2})=2$ vì $\lim(2-\dfrac{(-1)^n}{n+2}-2)=\lim\dfrac{(-1)^n}{n+2}=0$

(do $\left|\dfrac{(-1)^n}{n+2}\right|<\dfrac{1}{n+2}\to 0$)

d) $\lim(\dfrac{\sin 3n}{4n}-1)=-1$ vì $\lim\left[\dfrac{\sin 3n}{4n}-1-(-1)\right]=\lim\dfrac{\sin 3n}{4n}=0$

(do $\left|\dfrac{\sin 3n}{4n}\right|<\dfrac{1}{4n}\to 0$)

2. a) $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n+3}=\lim\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}{2+\dfrac{3}{n}}=\dfrac{\sqrt{1+\lim\dfrac{1}{n}}}{2+\lim\dfrac{3}{n}}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\dfrac{n^2+\sqrt[3]{n^3+1}+n\sqrt{n}}{n\sqrt{n^2+1}+3}=\lim\dfrac{1+\sqrt[3]{\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1}{n^6}}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}}}=1$

c) $\lim\dfrac{3^n-4^{n+1}}{3^{n+2}+4^n}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-4}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n.3^2+1}=-4$

d) $\lim\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\lim\dfrac{(2^2-1)(3^2-1)...(n^2-1)}{2^2.3^2...n^2}$

$=\lim\dfrac{1.3.2.4.3.5.4...(n-1)(n+1)}{2^2.3^2...n^2}=\lim\dfrac{1}{2}.\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{1}{2}$

e) Đặt $u_n=\dfrac{1.3.5.7...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$ thì $0\le u_n=\sqrt{u_n^2}=$

$=\sqrt{\dfrac{1.1.3.3.5.5.7...(2n-1)(2n+1)}{2^2.4^2.6^2...(2n)^2(2n+1)}}\le\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\to 0$. Do đó $\lim u_n=0$.

f) $\lim\dfrac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}$ (với $|a|,|b|<1$)

$=\lim\dfrac{(1+a+a^2+...+a^n)(1-a)(1-b)}{(1+b+b^2+...+b^n)(1-b)(1-a)}=\lim\dfrac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}\,\dfrac{1-b}{1-a}=\dfrac{1-b}{1-a}$

3. a) Ta có $u_1=\sqrt{2}$; $u_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}<\sqrt{2+2}=2$; $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}<\sqrt{2+2}=2$. Do đó $u_n<2$ ∀ n tức (u_n) bị chặn trên. Đồng thời $u_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}>u_1$. Giả sử $u_{k+1}>u_k$ thì $2+u_{k+1}>2+u_k$ nên $u_{k+2}=\sqrt{2+u_{k+1}}>\sqrt{2+u_k}=u_{k+1}$ tức dãy (u_n) tăng. Vì vậy có lim u_n. Đặt L = limu_n thì L = lim$u_{n+1}=\sqrt{2+\lim u_n}=\sqrt{2+L}$

hay $L^2=2+L\Rightarrow L^2-L-2=0\Rightarrow L=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}\Rightarrow L=2$ và $L=-1$.

Vì $u_n>0$ nên lấy limu_n= 2.

b) Ta có $u_n>0$ ∀ n ; $u_3=\sqrt{u_2}+\sqrt{u_1}=2\Rightarrow u_2<u_3$

Giả sử $u_n<u_{n+1}\Rightarrow u_{n+1}=\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{n-1}}<\sqrt{u_{n+1}}+\sqrt{u_n}=u_{n+2}$ tức (u_n) là dãy tăng.

Mặt khác: $u_n=\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_{n-2}}<\sqrt{u_n}+\sqrt{u_n}=2\sqrt{u_n}\Rightarrow u_n^2<4u_n$.

Vì $u_n>0$ ∀ n nên $u_n<4$ ∀ n tức (u_n) bị chặn trên. Do đó có limu_n.

Đặt L = limu_n thì $L=2\sqrt{L}\Leftrightarrow L^2=4L\Leftrightarrow L=4=\lim u_n$.

c) Dùng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương u_{n+1} và $(1-u_n)$ ta được

$u_{n+1}(1-u_n)>2\sqrt{u_{n+1}(1-u_n)}>2.\dfrac{1}{2}=1\Rightarrow u_{n+1}>u_n$ ∀ n= 1,2...tức (u_n) tăng .

Mặt khác, theo giả thiết $0 < u_n < 1$ tức bị chặn trên nên có $\lim u_n$. Đặt $L = \lim u_n$ thì vì $u_{n+1}(1 - u_n) > \frac{1}{4}\ \forall n \Leftrightarrow \lim u_{n+1}(1 - u_n) \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \lim u_{n+1} - \lim u_{n+1}.u_n$

$= L - L^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \left(L - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$. Do đó $L - \frac{1}{2} = 0$ hay $L = \lim u_n = \frac{1}{2}$.

4.a) $S = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} + ... = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$

b) $\frac{u_1}{1-q} = \frac{5}{3}$ và $u_1 + u_1q + u_1q^2 = u_1(1 + q + q^2) = \frac{39}{25} = \frac{u_1}{1-q}(1 - q^3) = \frac{5}{3}(1 - q^3)$

hay $q^3 = 1 - \frac{117}{53} \Rightarrow q = \frac{2}{5}$ và $u_1 = 1$.

c) $0,271271271.... = \frac{271}{10^3} + \frac{271}{10^6} + \frac{271}{10^9} + ... = \frac{\frac{271}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}} = \frac{271}{999}$.

5.a) $\lim \sqrt{2n+3} - \sqrt{n+1}\ ) = \lim \frac{2n+3-(n+1)}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{n+1}} = \lim \frac{n+2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{n+1}} = +\infty$

. b) $\lim(2^n - 3^n) = \lim 3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right] = \lim 3^n.\lim\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right] = -\infty$.

c) $\lim \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} = \lim \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{n+2-(n+1)} = \lim(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}) = +\infty$.

6. a) Nếu có $\lim u_n = L$ hữu hạn thì $L = L + \frac{1}{L}$ tức $\frac{1}{L} = 0$. Điều này vô lí. Do đó không tồn tại $\lim(u_n)$ hữu hạn. b) $u_1 = u_0 + \frac{1}{u_0} = 2 > 1 = u_0$; $u_2 = u_1 + \frac{1}{u_1} = 2 + \frac{1}{2} > 2$ v.v..., tức u_n là dãy tăng và không bị chặn trên nên $\lim u_n = +\infty$.

7. Ta có (u_n) tăng và (v_n) giảm. Đồng thời: $a < u_1 < u_2 < .... < u_n < v_n < v_{n-1} < .... < v_1 < b$

Đặt $\lim u_n = L$, $\lim v_n = l$ thì $L = \sqrt{L.l}$ và $l = \frac{L+l}{2} \Rightarrow L = l$ (đpcm).

8. a) $\lim \frac{\sqrt{n^4 - 2n + 3}}{-2n^2 + 3} = -\frac{1}{2}$ (kết quả B), vì:

$$\lim \frac{\sqrt{n^4 - 2n + 3}}{-2n^2 + 3} = \lim \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^4}}}{-2 + \frac{3}{n^2}} = \frac{\sqrt{1 - 0 + 0}}{-2 + 0} = -\frac{1}{2}$$

b) $\lim \frac{n\sqrt[3]{n^3+1} + n\sqrt{n}}{1 - 3n\sqrt{n^2+1}} = -\frac{1}{3}$ (kết quả A), vì :

$$\lim \frac{n\sqrt[3]{n^3+1} + n\sqrt{n}}{1 - 3n\sqrt{n^2+1}} = \lim \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}} + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2} - 3\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{\sqrt{1+0} + 0}{0 - 3\sqrt{1+0}} = -\frac{1}{3}$$

c) $\lim\left(\sqrt{n^2 - n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}\right) = -\frac{1}{2}$ (kết quả D), vì :

$$\lim\left(\sqrt{n^2 - n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}\right) = \lim \frac{n^2 - n + 1 - n^2 - 1}{\sqrt{n^2 - n + 1} + \sqrt{n^2 + 1}}$$

$$= \lim \frac{-\frac{n}{n}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - 0 + 0} + \sqrt{1 + 0}} = -\frac{1}{2}$$

d) $\lim \frac{2.1^2 + 3.2^2 + ... + (n+1)n^2}{n^4} = \frac{1}{4}$ (kết quả A), vì :

$$\lim \frac{2.1^2 + 3.2^2 + ... + (n+1)n^2}{n^4} = \lim \frac{(1+1).1^2 + (2+1).2^2 + ... + (n+1)n^2}{n^4}$$

$$= \lim \frac{(1^3 + 2^3 + ... + n^3) + (1^2 + 2^2 + ... + n^2)}{n^4}$$

$$= \lim\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4}\right] = \lim \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{4} + \lim \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6n}.$$

$$= \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}.$$

9. Ta có $u_0 > 0$ và $u_n + \frac{1}{u_n} \geq 2$ nên $u_n \geq 1$ với $\forall$ n = 1, 2....

Vì $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) < u_n$ nên u_n) là dãy giảm. Do đó tồn tại $\lim u_n =$ a ≥ 1.

Chuyển qua giới hạn ta được: $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ hay $a^2 = 1$ tức là được a = ± 1.

Nhưng vì $u_n \geq 1$ nên lấy a = 1 tức là $\lim u_n = 1$ (đpcm).

10. Ta viết $u_k - u_{k-1} = \frac{u_{k-1} + u_{k-2}}{2} - u_{k-1} = -\frac{u_{k-1} - u_{k-2}}{2}$. Từ đây suy ra:

$$u_2 - u_1 = b - a;\ u_3 - u_2 = -\frac{b-a}{2};\ u_4 - u_3 = -\frac{b-a}{4};\ldots;u_n - u_{n-1} = (-1)^n \frac{b-a}{2^{n-2}}.$$

Ta có : $u_n = u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \ldots + (u_n - u_{n-1})$

$$= a + (b-a) - \frac{b-a}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{b-a}{2^{n-2}} = a + (b-a)\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2^{n-2}}\right]$$

$$= a + \frac{(b-a)\left[1 - \frac{(-1)^n}{2^{n-2}}\right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \to \frac{a+2b}{3}, \text{ tức là } \lim u_n = \frac{a+2b}{3}.$$

II. GIỚI HẠN HÀM SỐ

11. a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - 2x + 8}{x+1} = \lim\limits_{x_n \to 0} \frac{x_n^2 - 2x_n + 8}{x_n + 1} = \frac{\lim\limits_{x_n \to 0}(x_n^2 - 2x_n + 8)}{\lim\limits_{x_n \to 0} x_n + 1} = 8$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 1}{2x - 1} = \lim\limits_{x_n \to 1} \frac{x_n^3 - 3x_n + 1}{2x_n - 1} = \frac{\lim\limits_{x_n \to 1}(x_n^3 - 3x_n + 1)}{\lim\limits_{x_n \to 1} 2x_n - 1} = -1$

12. a) Lấy $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ và $y_n = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$ đều có $\lim x_n = \lim y_n = 0$;

nhưng $\lim\cos\frac{1}{x_n} = 1$ và $\lim\cos\frac{1}{y_n} = 0$. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{x \to 0}\cos\frac{1}{x}$.

b) Lấy $x_n = \frac{1}{n\pi} + 1$ và $y_n = \frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}} + 1$ đều có $\lim x_n = \lim y_n = 1$

nhưng $\lim sin\frac{1}{x_n - 1} = \lim\sin n\pi = 0$ và $\lim sin\frac{1}{y_n - 1} = \lim sin\frac{1}{\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}}$

$= \lim sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$ .Do đó không tồn tại $\lim\limits_{x \to 1}\sin\frac{1}{x-1}$.

13. a) $\lim\limits_{x \to 2}\sqrt{\frac{x^4 + 3x - 1}{2x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{\lim\limits_{x \to 2} x^4 + 3\lim\limits_{x \to 2} x - 1}{\lim\limits_{x \to 2} 2x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{16 + 6 - 1}{2.4 - 1}} = \sqrt{3}$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty}\frac{\sqrt{x^6 + 2}}{3x^3 - 1} = \lim\limits_{x \to -\infty}\frac{-x^3\sqrt{1 + \frac{2}{x^6}}}{3x^3 - 1}$ (x → −∞ , x < 0)

$$= \lim\limits_{x \to -\infty}\frac{-\sqrt{1 + \frac{2}{x^6}}}{3 - \frac{1}{x^3}} = -\frac{1}{3}.$$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{6}{3x-1}\right)^{2x}$

$= \lim\limits_{t \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t.\frac{2(6t+1)}{3t}}$ với $t = \frac{3x-1}{6} = \left[\lim\limits_{t \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{\lim\limits_{t \to +\infty}\frac{2(6t+1)}{3t}} = e^4$.

d) $\lim\limits_{x \to 1}\frac{x^n - nx + n - 1}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to 1}\frac{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 - n)}{(x-1)^2}$

$$= \lim\limits_{x \to 1}\frac{(x^{n-1} - 1) + (x^{n-2} - 1) + \ldots + (x - 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left[(x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1)+(x^{n-3}+\ldots+1)+\ldots+1\right]}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[(x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1)+(x^{n-3}+\ldots+x+1)+\ldots+1\right]$$

$$= (n-1)+(n-2)+\ldots+1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x} = \lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y-1}{\dfrac{y^n-1}{a}}$ (với $y=\sqrt[n]{1+ax}$ hay $x=\dfrac{y^n-1}{a}$)

$$= a\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y^n-1} = a\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{(y-1)(y^{n-1}+\ldots+1)} = \frac{a}{n}.$$

14. a) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 3^-}2x^2+5\lim\limits_{x\to 3}x-3}{\lim\limits_{x\to 3^-}(x+3)^2} = \dfrac{18+15-3}{6^2} = \dfrac{5}{6}.$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{x-2} = 1.$

c) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}} = \lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{\dfrac{(x-3)(x-4)}{(3-x)(3+x)}} = \lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{\dfrac{(3-x)(4-x)}{(3-x)(3+x)}}.$

$$= \lim_{x\to 3^-}\sqrt{\frac{4-x}{3+x}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

d) $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}} = \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{(x+1)(x+2)}{\sqrt{x^4(x+1)}} = \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{(x+2)}{x^2}\sqrt{\dfrac{(x+1)^2}{x+1}} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{3x^2-5}{x+4} = \dfrac{\lim\limits_{x\to -4^-}3x^2-5}{\lim\limits_{x\to -4^-}(x+4)} = -\infty$ (xem quy tắc 2).

15. a) $\lim\limits_{x\to -2^-}f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-}2|x|-1 = 3$; $\lim\limits_{x\to -2^+}f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+}\sqrt{2x^2+1} = 3$. Do đó

$\lim\limits_{x\to 2}f(x) = 3$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(4x-3) = 5$; $\lim\limits_{x\to 2}f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x+3) = 3$. Do đó không

tồn tại $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

16. a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2-7x+12}}{3|x|-17} = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{|x|\sqrt{2-\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}}}{3|x|-17} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+1}-1}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+1-1}{x(x+1)(\sqrt{x^3+1}+1)} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-x^2}-1}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-x^2-1}{x(x-1)(\sqrt{2x-x^2}+1)}$

$$= -\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(\sqrt{2x-x^2}+1)} = 0.$$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^3+x}} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x+2)}{x}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+\dfrac{1}{x}}} = 1.$

e) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{(x-4)(x-1)}$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(x-1)} = \frac{1}{12}.$$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-x\right) =$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{x^3+x^2-1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+x^2-1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2-1}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-1}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2-1}+\sqrt[3]{(x^3+x^2-1)^2}}.$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2})^2}} = \frac{1}{3}.$$

17. a) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+2x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}.2}=\mathrm{e}^2$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}(\sin^2 x)^{\frac{\tan x}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)^{\frac{1}{\cos^2 x}.\sin x.\cos x}$

$$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)^{\frac{1}{\cos^2 x}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos x}=e^{\left(-1\right)^0}=\mathrm{e}^0=1$$

18. a) $\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{x^4+1}{x^2+4x+3}=\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{x^4+1}{(x+3)(x+1)}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{\sqrt{8+2x}-2}{\sqrt{x+2}}=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{8+2x-4}{\sqrt{x+2}(\sqrt{8+2x}+2)}$

$$=\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{4+2x}{\sqrt{x+2}(\sqrt{8+2x}+2)}=\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{2(2+x)}{\sqrt{x+2}(\sqrt{8+2x}+2)}=\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{8+2x}+2}$$

$=0.$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{(x-2)^2}\sqrt{\dfrac{x+4}{4-x}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3\sqrt{\dfrac{x+4}{4-x}}}{(x-2)^2}=+\infty.$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4+x^2}\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+x-4-x^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{4+x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to -\infty}-\dfrac{1-\dfrac{4}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}}=-\dfrac{1}{2}$ (do khi x → $-\infty$ thì x < 0 nên khi đưa x^2 ra ngoài dấu căn được – x).

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+5}-x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+5-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+5)^2}+x\sqrt[3]{x^3+5}+x^2}=0.$

f) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{2x^4+3x+1}{x^2-x+2}}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^4+3x+1}{x^2-x+2}}=\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}=\dfrac{3}{2}.$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}=\lim\limits_{x\to -\infty}2.\dfrac{x-\dfrac{1}{2}}{\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}}=\lim\limits_{x\to -\infty}2.\dfrac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{3}{4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}}}=-2.$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{5x^2+1}}{2x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5x^2+1}{x^2}}\right)$ (do x → $-\infty$ nên x< 0).

$$=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5+\frac{1}{x^2}}\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{5}=-\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

19.a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=1$ (kết quả A), vì: $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

$$=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}=1.$$

b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$ (kết quả A), vì : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$$=\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\right]=\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right]$$

$$=\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right]=0+\frac{1}{\sqrt{2a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)=-\dfrac{1}{4}$ (kết quả B), vì :

$$\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}x\frac{2x\left(\sqrt{x^2+2x}-x-1\right)}{\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x+x\sqrt{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x}\right)}=-\frac{1}{4}.$$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^5+7x^3-11}{x^5+x^4-3x}=-3$ (kết quả B). vì : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^5+7x^3-11}{x^5+x^4-3x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3+\dfrac{7}{x^2}-\dfrac{11}{x^5}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^4}}=-3$. e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^5+x^4-3}{3x^2-7}=+\infty$ (kết quả D), vì :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^5+x^4-3}{3x^2-7}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^5}}{\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{7}{x^5}}=+\infty$ (do mẫu số luôn nhỏ hơn 0).

f) $\lim\limits_{x\to0}x\sqrt{\cos\dfrac{1}{x}}=0$ (kết quả C) vì : $\left|x\sqrt{\cos\dfrac{1}{x}}\right|\le|x|\to0$ khi $x\to0$

g) $\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$ (kết quả B) vì : Đặt $y=\dfrac{1}{x}$ thì $x\to0$; $y\to\infty$, đồng thời

$\left[\dfrac{1}{x}\right]=[y]=y-r$ với $0\le r\le1$; do đó : $\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{y-r}{y}=1$.

III. HÀM SỐ LIÊN TỤC

20. a) Xét hàm số f(x) tại x = 2, ta có:

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-2}=1;$

$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-2}=1.$

Do đó $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=1=f(2)$. Vì vậy hàm f(x) liên tục tại x = 2. Hàm f(x) hiển nhiên là liên tục với mọi $x\ne2$. Do vậy f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Với $x\ne\pi$, hàm f(x) liên tục. Ta chỉ xét tại $x=\pi$. Khi đó

$\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos(\pi-x)}{(x-\pi)^2}=\dfrac{1}{2}=f(\pi)$ tức là f(x) liên tục tại $x=\pi$. Do đó hàm f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$.

21. Hàm f(x) liên tục tại mọi điểm $x\ne2$. Ta chỉ xét tại x = 2. Ta có:

$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(3x+a)=6+a$

$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(x^2-1)=3$. Để f(x) liên tục tại x = 2 thì phải có 6 + a = 3 hay a = –3. Như vậy với a = –3 hàm f(x) liên tục trên toàn $\mathbb{R}$.

22. a) Hàm $f(x)=\sqrt{9-3x^2}$ xác định với mọi x thoả mãn $9-3x^2\ge0$ hay $3x^2\le9\Rightarrow x^2\le3\Rightarrow|x|\le\sqrt3$. Do đó f(x) liên tục trên $\left[-\sqrt3;\sqrt3\right]$.

b) Hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ xác định với mọi x trong (– 2; 2). Do đó f(x) liên tục trong khoảng (– 2; 2).

c) Hàm số $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{2-x}$ xác định với mọi x thoả mãn $1-x\ge0$ và $2-x\ge0$ hay $x\le1$. Do đó f(x) liên tục tại mọi điểm $x\le1$.

23. a) Đặt $y=\sqrt{x-1}$ và xét $f(y)=y^3+my^2-1$ liên tục trên $[0;+\infty)$ và $f(0)=-1<0$. Mặt khác $f(y)\to+\infty$ khi $y\to+\infty$ nên tồn tại một số c > 0 để f(c) > 0. Vì vậy, phương trình f(y) = 0 có nghiệm y_0 trong (0; c) tức $y_0>0$.

Vì $y_0=\sqrt{x_0-1}$ nên phương trình $\left(\sqrt{x-1}\right)^3+mx=m+1$ có nghiệm $x_0>1$.

b) Đặt $f(x)=ax^2+bx+c$ thì f(x) liên tục với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Ta có f(0) = c, Tính $f\left(\dfrac{m+1}{m+2}\right)=\dfrac{(m+1)^2}{m+2}\left[\dfrac{a}{m+2}+\dfrac{b}{m+1}+\dfrac{c(m+2)}{(m+1)^2}\right]=\dfrac{-c}{m(m+2)}$

Vì vậy $f(0).f\left(\dfrac{m+1}{m+2}\right)=\dfrac{-c^2}{m(m+2)}\leq 0$ (Do m > 0)

$\Rightarrow$ phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm trong khoảng $\left(0;\dfrac{m+1}{m+2}\right)$ tức là luôn có nghiệm dương.

Chương V.

I. ĐẠO HÀM VÀ Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

1. a) Ta thực hiện 2 bước tính đạo hàm của hàm số $y = 3x^2 - 4x$ tại điểm $x_0 = 2$ như sau: Tính $\Delta y = 3(2 + \Delta x)^2 - 4(2 + \Delta x) - 3.2^2 + 4.2$

$= 3(4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 8 - 4\Delta x - 4 = 12 + 12\Delta + 3(\Delta x)^2 - 8 - 4\Delta x - 4$

$= 3(\Delta x)^2 + 8\Delta x$. Tính $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3(\Delta x)^2+8\Delta x}{\Delta x} = 8.$

Vậy f'(2) = 8. b) $\Delta y = \dfrac{1}{3(x+\Delta x)-1}-\dfrac{1}{3x-1}$ với $x \neq \dfrac{1}{3}$

$$=\frac{3x-1-3x-3\Delta x+1}{[3(x+\Delta x)-1](3x-1)}=\frac{-3\Delta x}{[3(x+\Delta x)-1](3x-1)};$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-3\Delta x}{\Delta x[3(x+\Delta x)-1](3x-1)}=\dfrac{-3}{(3x-1)^2}$. Vậy $f'(x)=\dfrac{-3}{(3x-1)^2}$ với mọi $x \neq \dfrac{1}{3}$.

c) $\Delta y = \sqrt{6-2(x+\Delta x)}-\sqrt{6-2x}$ (với x < 3) $= \sqrt{6-2x-2\Delta x}-\sqrt{6-2x}$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{6-2x-2\Delta x}-6+2x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{6-2x-2\Delta x-6+2x}{\Delta x\left[\sqrt{6-2x-2\Delta x}+\sqrt{6-2x}\right]}=\frac{-2}{2\sqrt{6-2x}}$$

Vậy $f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{6-2x}}$ với mọi x < 3.

2. Ta có $y = x^4$ nên $y' = 4x^3$, do đó:

a) Phương trình tiếp tuyến tại tiếp điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là

$y = 4(-1)^3(x - (-1)) + (-1)^4 = -4(x + 1) + 1$ hay $y = -4x - 3$;

b) Tung độ của tiếp điểm là 16 nên hoành độ của tiếp điểm là $x_0 = 2$ và $x_1 = -2$ (vì $(\pm 2)^4 = 16$). Vậy phương trình tiếp tuyến tại $x_0 = 2$ là:

$y = 4.2^3(x - 2) + 16 = 32x - 64 + 16$ hay

$y = 32x - 48$; còn phương trình tiếp tuyến tại $x_1 = -2$ là

$y = 4.(-2)^3(x + 2) + 16 = -32x - 48$ hay $y = -32x - 48$;

c) Hệ số góc của tiếp tuyến là 4 tức là đạo hàm bằng 4 nên hoành độ của tiếp điểm là $x_0 = 1$ (vì $4x_0^3 = 4$) Vì vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$y = 4(x - 1) + 1$ hay $y = 4x - 3$;

d) Tiếp tuyến song song với đường thẳng y = 108x nên chúng có cùng hệ số góc tức là tiếp tuyến tại tiếp điểm có hoành độ x_0 thoả mãn $4x_0^3 = 108$ hay $x_0 = 3$. Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 108(x - 3) + 3^4$ hay $y = 108x - 243$;

e) Nếu tiếp điểm có hoành độ x_0 thì phương trình tiếp tuyến là:

$y = 4x_0^3(x - x_0) + x_0^4$ hay $y = 4x_0^3x - 3x_0^4$. Vì tiếp tuyến đi qua điểm A(0; –192) nên ta có $4x_0^3.0 - 3x_0^4 = -192$ hay $x_0^4 = 64$ tức là có 2 giá trị $x_0 = 4$ và $x_0 = -4$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 4$ là $y = 4.4^3(x - 4) + 64$ hay $y = 64x - 192$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = -4$ là $y = 4.(-4)^3(x + 4) + 64$ hay $y = -64x - 192$. Cả hai tiếp tuyến này đều đi qua A(0; – 192)

3. Nếu tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ song song với trục hoành thì góc giữa tiếp tuyến với trục hoành là $\alpha = \pi$. Vì vậy $f'(x_0) = \tan\alpha = 0$. Điều ngược lại không đúng, chẳng hạn f(x) = c (c là hằng số) thì f'(x) = 0 nhưng đồ thị không có tiếp tuyến nào cả nên không có tiếp tuyến song song với trục hoành.

4. Vận tốc của vật thể tại thời điểm $t_0 = 5$s là v(5) = s'(5) = 2a.5 = 10a (s) (a là hằng số).

II. CÁC QUY TẮC VÀ CÔNG THỨC TÍNH ĐẠO HÀM

5. a) $y' = (2x^5 - 4x + 3)' = (2x^5)' - (4x)' + (3)'$

$= 2.5.x^4 - 4.1 + 0 = 10x^4 - 4$. Do đó $y'(1) = 10.1^4 - 4 = 6$

b) $y' = (x^6 - 5x^4 + 2x - 3\sqrt{x})' = (x^6)' - (5x^4)' + (2x)' - (3\sqrt{x})'$

$= 6x^5 - 5.4x^3 + 2 - \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$. Vậy $y' = 6x^5 - 20x^3 - \dfrac{3}{2\sqrt{x}} + 2$

c) Hàm số y có đạo hàm tại mọi $x \neq 0$ là $y' = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 6x & x > 0 \end{cases}$

Tại x = 0 tính Δy và xét $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ta có: $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{2(0 + \Delta x) + 1 - 1}{\Delta x} = 2$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{3(0 + \Delta x)^2 + 1 - 1}{\Delta x} = 0$. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ tức là tại x = 0, hàm số y không có đạo hàm. Vậy đạo hàm của hàm số y là:

$y' = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 6x & x > 0 \end{cases}$ (Hàm số liên tục tại x = 0).

d) $y' = \left[3x^4(5x + 1)(2x^2 - 3)\right]'$

$= (3x^4)'(5x + 1)(2x^2 - 3) + 3x^4(5x + 1)'(2x^2 - 3) + 3x^4(5x + 1)(2x^2 - 3)'$

$= 12x^3(5x + 1)(2x^2 - 3) + 3x^4.5(2x^2 - 3) + 3x^4(5x + 1).4x$

$= 12x^3(10x^3 - 15x + 2x^2 - 3) + 30x^6 - 45x^4 + 60x^6 + 12x^5$

$= 120x^6 - 180x^4 + 24x^5 - 36x^3 + 30x^6 - 45x^4 + 60x^6 + 12x^5$

Vậy $y' = 210x^6 + 36x^5 - 225x^4 - 36x^3$.

e) $y' = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' + \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' + \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = (x^{-1})' + \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' + \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'$

$= -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x^3}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$. Vậy $y' = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} - \dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$.

f) $\left[\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}\right)^{20}\right]' = 20\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}\right)^{19} \cdot \left(\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}\right)'$

$= 20\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}\right)^{19} \dfrac{\sqrt{1-x}.(1+x)' - (1+x)\left(\sqrt{1-x}\right)'}{1-x}$

$= 10\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}\right)^{19} \dfrac{2(1-x) + (1+x)}{(1-x)\sqrt{1-x}}$. Vậy $y' = 10\dfrac{(3-x)(1+x)^{19}}{(1-x)^{11}}$

6. a) $y' = \left(\dfrac{\sin x + \cos 3x}{\sin x - \cos 3x}\right)'$

$= \dfrac{(\sin x - \cos 3x)(\sin x + \cos 3x)' - (\sin x + \cos 3x)(\sin x - \cos 3x)'}{(\sin x - \cos 3x)^2}$

$= \dfrac{(\sin x - \cos 3x)(\cos x - 3\sin 3x) - (\sin x + \cos 3x)(\cos x + 3\sin 3x)}{(\sin x - \cos 3x)^2}$.

Rút gọn tử số ta được $y' = -2\dfrac{3\sin x \sin 3x + \cos x \cos 3x}{(\sin x - \cos 3x)^2}$

b) $y' = \left(\sqrt{1 + 3\tan(x^2 + 1)}\right)' = \dfrac{3.2x}{2\sqrt{1 + 3\tan(x^2 + 1)}} \cdot \dfrac{1}{\cos^2(x^2 + 1)}$

Vậy $y' = \dfrac{3x}{\sqrt{1 + 3\tan(x^2 + 1)}.\cos^2(x^2 + 1)}$.

c) y' = (2sin3x. cos5x)' = 2(sin3x)'cos5x + 2(sin3x)(cos5x)'

= 6cos3x cos5x – 10sin3x sin5x. Vậy y' = 6cos3x cos5x – 10sin3x sin5x

(= 8cos8x – 2cos2x vì (2sin3x.cos5x)' =(sin8x – sin2x)')

d) y' = ($\sqrt{\sin 2x}$ + cos $\sqrt{3x^2-2}$)' = $\left(\sqrt{\sin 2x}\right)'$ + (cos $\sqrt{3x^2-2}$)'

$$= \frac{2\cos 2x}{2\sqrt{\sin 2x}} - \sin\sqrt{3x^2-2}\,.\,\frac{6x}{2\sqrt{3x^2-2}}$$

Vậy y' = $\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}} - \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2-2}}\sin\sqrt{3x^2-2}$

e) y' = (xcot³(2x²– 1))' = (x)'cot³(2x² – 1) + x$\left(\cot^3(2x^2-1)\right)'$

$$= \cot^3(2x^2-1) - x.3.\ \cot^2(2x^2-1).\frac{4x}{\sin^2(2x^2-1)}$$

Vậy y' = cot³(2x² – 1) – $\dfrac{12x^2\cot(2x^2-1)}{\sin^2(2x^2-1)}$

f) y' = $\left[x^2\tan^4(2x-1) - 5\cot(4x^3+1)\right]'$

$$= (x^2)'\tan^4(2x-1) + x^2(\tan^4(2x-1))' - \left[5\cot(4x^3+1)\right]$$

$$= 2x\tan^4(2x-1) + x^2.4\tan^3(2x-1)\frac{2}{\cos^2(2x-1)} + \frac{5.4.3x^2}{\sin^2(4x^3+1)}$$

Vậy y' = 2xtan⁴(2x – 1) + $\dfrac{8x^2\tan^3(2x-1)}{\cos^2(2x-1)} + \dfrac{60x^2}{\sin^2(4x^3+1)}$

7. a) f(x) = $\sqrt{x^2-3x}$ $\Rightarrow$ f'(x) = $\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$

f'(x) ≤ f(x) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}} \leq \sqrt{x^2-3x}$. Điều kiện: $x^2 - 3x > 0$ hay $x < 0$ hoặc $x > 3$. Ta có: $2x - 3 \leq 2(x^2 - 3x)$ hay $2x - 3 \leq 2x^2 - 6x$

$\Rightarrow 2x^2 - 8x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 - \sqrt{2,5}$ hoặc $x \geq 2 + \sqrt{2,5}$. Kết hợp với điều kiện trên ta có nghiệm của bất phương trình là $x < 0$ hoặc $x \geq 2 + \sqrt{2,5}$.

b) f(x) = 2 cos²(4x – 1) nên f'(x) = – 2.2 cos(4x – 1). 4 sin(4x – 1)

hay f'(x) = - 8sin2(4x – 1).

Do đó : $|f'(x)| = |-8\sin 2(4x-1)| \leq 8.\ |\sin 2(4x-1)| \leq 8.1 = 8$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ sin2(4x – 1) = ± 1 $\Leftrightarrow$ x = $\dfrac{1}{16}(\pi + 4 + k2\pi)$.

8. Hàm số f(x) = x⁴ + 2x² – 1 nên f'(x) = 4x³ + 4x.

a) Tiếp điểm có hoành độ bằng 1 nên phương trình tiếp tuyến tại tiếp điểm này là: y = f'(1)(x – 1) + f(1) = 8(x – 1) + 2 hay y = 8x – 6 .

b) Tung độ của tiếp điểm là 2 nên có 2 hoành độ ứng với tung độ này là: $x_0 = 1$ và $x_1 = -1$. Vì vậy phương trình tiếp tuyến tại tiếp điểm (1; 2) là:

y = 8x – 6 (xem a)). Phương trình tiếp tuyến tại tiếp điểm (–1; 2) là:

y = f'(–1)(x + 1) + 2 = – 8(x + 1) + 2 hay y = – 8x – 6.

c) Vì tiếp tuyến song song với trục hoành nên hệ số góc của nó bằng không hay f'(x) = 4x³ + 4x = 0 $\Rightarrow$ $x_0 = 0$ tức là ta có tiếp tuyến là đường có phương trình: y = 0(x – 0) + f(0) hay y = –1.

d) Để tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng y = $-\dfrac{1}{8}$x + 3 thì hệ số góc của tiếp tuyến phải bằng 8 (tích của 2 hệ số góc bằng –1) hay 4x³ + 4x = 8. Giải ra được $x_0 = 1$. Do đó tiếp tuyến cần tìm có tiếp điểm (1; 2) là: y = 8x – 6 (câu a).

e) Giả sử tiếp tiếp tuyến đi qua A(0; -6) là y = f'(x_0)(x – x_0) + f(x_0)

= f'(x_0)x – f'(x_0). x_0 + f(x_0) thì $-x_0(4x_0^3 + 4x_0) + x_0^4 + 2x_0^2 - 1 = -6$

$\Leftrightarrow -4x_0^4 - 4x_0^2 + x_0^4 + 2x_0^2 - 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow -3x_0^4 - 2x_0^2 + 5 = 0$.

Giải ra được $x_0 = \pm 1$. Vậy có hai tiếp tuyến với phương trình là: y = 8x – 6 và

y = – 8x – 6 (câub).

9. Giả sử tiếp tuyến có hoành độ của tiếp điểm là x_0 tức là có phương trình

y = $-\dfrac{1}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \dfrac{1}{x_0-1}$ thì nếu tiếp tuyến cắt các trục toạ độ tại các điểm A (a; 0) và B(0; b) thì: a = 2x_0 – 1 và b = $\dfrac{2x_0-1}{(x_0-1)^2}$. Diện tích tam giác OAB là $\dfrac{a.b}{2}$ = 2 hay $(2x_0 - 1)^2 = 4(x_0 - 1)^2$.

Từ đây suy ra: $4x_0^2 - 4x_0 + 1 = 4x_0^2 - 8x_0 + 4 \Rightarrow x_0 = \frac{3}{4}$ và $f(x_0) = 4$.

Vậy tại tiếp điểm $\left(\frac{3}{4};4\right)$ của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x-1}$, tiếp tuyến của đồ thị chắn trên các trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 2 (đơn vị diện tích).

10. a) $y' = (\sin 2x - 2\sin x + 3)' = 2\cos 2x - 2\cos x = 2(2\cos^2 x - 1) - 2\cos x$ $= 4\cos^2 x - 2\cos x - 2$ .Giải phương trình $y' = 0$ hay $4\cos^2 x - 2\cos x - 2 = 0$ $\Rightarrow \cos x = 1$ và $\cos x = -\frac{1}{2}$; Ta có: $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$; $\cos x = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

b) $y' = (\cos 2x - 5\cos x)' = -2\sin 2x + 5\sin x = -4\sin x\cos x + 5\sin x$.

Giải phương trình $y' = 0$ hay $-\sin x(4\cos x - 5) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$.

11. a) Kết quả A vì $y' = 6x - 4$ nên $y'(-1) = -10$.

b) Kết quả C) vì : $y' = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} - 1$ nên $y'(2) = \frac{1}{3}$;

c) Kết quả C) vì: $y' = \dfrac{2x\sqrt{x^2+8} - x^2\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+8}}}{\left(\sqrt{x^2+8}\right)^2} = \dfrac{2x^3 + 16x - x^3}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}}$

$= \frac{x^3 + 16x}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}}$ nên $y'(1) = \frac{17}{27}$

d) Kết quả D) vì $y' = 2(3x^3 - 2x - 1)(9x^2 - 2)$ nên $y'(-1) = -28$.

e) Kết quả D) vì $y' = 3\tan^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right).\dfrac{1}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$ nên $y'(0) = 36$.

f) Kết quả D) vì $y' = -2\cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right).\dfrac{1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$ nên $y'(0) = -8\sqrt{3}$

12. a) Kết quả D) vì $y' = 4x^3 - 4x$ nên $y'(0) = 0$ và phương trình đường tiếp tuyến tại M(0; 1) là $y = 0(x - 0) + 1 = 1$ hay $y = 1$.

b) Kết quả C) vì: $y' = 1 + \frac{4}{(2x-1)^2}$ nên $y'(0) = 5$. Ta có $y(0) = 3$ nên phương trình đường tiếp tuyến cần tìm là $y = 5x + 3$.

c) Kết quả B) vì $y' = 4x - 3$ nên muốn có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{5}x + 3$ thì $4x - 3 = 5$ (tích các hệ số góc của hai đường thẳng là -1) $\Rightarrow x_0 = 2$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 5(x - 2) + 2.2^2 - 3.2 + 1$ hay $y = 5x - 7$;

d) Kết quả D) vì $y' = 4x^2 - 4x + 2 = 1$ (là hệ số góc của đường thẳng $y = x - 3$).

Giải ra được $x_0 = \frac{1}{2}$ nên phương trình của đường tiếp tuyến cần tìm là:

$$y = \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2.\frac{1}{2} + 1 = x + \frac{4}{6} \text{ hay } y = x + \frac{7}{6}$$

III. VI PHÂN

13.a) $f(x) = \sin 3x \Rightarrow f'(x) = 3\cos 3x$.

$$df\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx f'\left(\frac{\pi}{3}\right).\Delta x = 3.\cos 3.\frac{\pi}{3}.0.001 = -0,003.$$

b) $f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 2$ nên $df(-1) \approx f'(-1).0,002$

$= (4.(-1)^3 - 15(-1)^2 + 2).0,002 = -0,034$

c) $f'(x) = \frac{3\cos x - \sin x}{2\sqrt{3\sin x + \cos x}}$ nên:

$$df\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx f'\left(\frac{\pi}{4}\right).0,001 = \frac{3\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}}{2\sqrt{3\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}}} \approx \frac{3\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = 0,297302.$$

14. a) $f'(x) = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}\right)' = \dfrac{(x^2+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}.2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(x^2+1)-4x^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{1-3x^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$. Do đó $df = \dfrac{1-3x^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}dx$;

b) $f'(x) = (3x^2 + 2\sin^3x - \cot(2x^2+1))' = 6x + 6\sin^2x\cos x + \dfrac{4x}{\sin^2(x^2+1)}$

$= 6x + 3\sin x\sin 2x + \dfrac{4x}{\sin^2(x^2+1)}$.

Do đó $df = \left(6x + 3\sin x\sin 2x + \dfrac{4x}{\sin^2(x^2+1)}\right)dx$.

c) $f'(x) = \left(\tan\left(\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x}{4} + 5\right)\right)' = \dfrac{\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{4}}{\cos^2\left(\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x}{4} + 5\right)}$

$\Rightarrow df = \dfrac{\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{4}}{\cos^2\left(\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x}{4} + 5\right)}dx$

15. a) Đặt $f(x) = \sin x$ thì $f'(x) = \cos x$ (x tính theo radian); $x_0 = \dfrac{\pi}{4} (= 45^0)$;

$\Delta x = \dfrac{\pi}{360}$ (= 30'); $f\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{360}\right) \approx f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right).\dfrac{\pi}{360}$

hay $\sin 45^030' \approx \sin\dfrac{\pi}{4} + \left(\cos\dfrac{\pi}{4}\right).\dfrac{\pi}{360} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\pi}{360}$

hay $\sin 45^030' \approx 0,713277$.

b) $f(x) = \sqrt{x}$ thì $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. $\sqrt{1.02} = \sqrt{1+0.02} \approx \sqrt{1} + \dfrac{1}{2\sqrt{1}}.0,02 = 1,01$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ thì $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$; $\dfrac{1}{0,9995} = \dfrac{1}{1-0,0005}$ nên:

$f(1 - 0,0005) \approx f(1) + f'(1).(-0,0005) = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1^2}.0,0005 = 1,0005$.

16. Ta có $\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.\Delta x$. Vì $|x| << a$ nên lấy $x = a^2$ và $\Delta x = x$ ta được $\sqrt{a^2+x} \approx a + \dfrac{x}{2a}$ (a > 0) (đfcm). Áp dụng $\sqrt{5} = \sqrt{2^2+1} \approx 2 + \dfrac{1}{4} = 2,25$ (trong khi tính bằng máy tính bỏ túi $\sqrt{5} \approx 2,2360$); $\sqrt{34} = \sqrt{6^2-2} \approx 6 - \dfrac{2}{12}$ $\approx 5,8333$ (tính bằng máy tính $\sqrt{34} \approx 5,8309$); $\sqrt{120} = \sqrt{11^2-1} \approx 11 - \dfrac{1}{22}$ $\approx 10,95455$ (tính bằng máy tính $\sqrt{120} \approx 10,95445$).

17. a) Kết quả B) vì $y' = \dfrac{2}{(8x^2+1)\sqrt{8x^2+1}}$ nên $y'(1) = \dfrac{2}{27}$.

Do đó $dy(1) = \dfrac{2}{27}.0,001 = \dfrac{0,002}{27} \approx 74.10^{-6}$;

b) Kết quả D vì : $y' = 3\cos 3x$ nên $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 3$.

Do đó $dy\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -3.0,0001 = -0,0003$.

c) Kết quả A) vì: $y' = \dfrac{2}{\sin^2x(1+\cot x)^3}$ nên $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{8}{(1+\sqrt{3})^3}$

Do đó $dy\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{8}{(1+\sqrt{3})^3}.\dfrac{\pi}{360} = \dfrac{\pi}{45(1+\sqrt{3})^3}$.

d) Kết quả B) vì:

$y' = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ nên $dy = \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

e) Kết quả B vì:

$\sqrt{0,997} = \sqrt{1-0,003} \approx \sqrt{1} - \dfrac{1}{2\sqrt{1}}.0,003 = 0,9985$ (tính bằng máy tính bỏ túi thì $\sqrt{0,997} \approx 0,998498$).

f) Kết quả C) vì $\cos 61^0 = \cos(60^0 + 1^0)$

$\approx \cos 60^0 - \sin 60^0.\dfrac{\pi}{180} \approx 0,4848$ (lấy $1^0 = \dfrac{\pi}{180}$ radian).

g) Kết quả B) vì $\tan 45^0 30' = \tan(45^0 + 30') = \tan\left(45^0 + \frac{\pi}{360}\right)$

$$\approx \tan 45^0 + \frac{1}{\cos^2 45^0}.\frac{\pi}{360} \approx 1{,}0174.$$

IV. ĐẠO HÀM CẤP CAO

18. a) $\left[(5-x)^{10}\right]^{(9)} = -10.\ 9.\ 8.7.6.5.4.3.2.(5-x) = -10!\ (5-x) = 10!(x-5)$.

b) Viết $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}\right)$. $\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^{(n)}$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}\right] = \frac{n!}{2}\left[\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]$$

c) $\dfrac{1}{x^2-3x+2} = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x^2-3x+2}\right)^{(n)} = \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}$$

$$= (-1)^n\, n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right];$$

d) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}} = x.\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ $\quad y^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{(k)}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n-k)}$

$= x\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n)} + n.1.\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n-1)} + 0$ Ta có: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n)} = \left[(1+x)^{-\frac{1}{2}}\right]^{(n)}$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)....\left(-\frac{1}{2}-n-1\right)(1+x)^{-\frac{1}{2}-n} = (-1)^n\frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n(1+x)^{\frac{2n+1}{2}}}$$

Vậy $y^{(n)} = (-1)^n\dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2^n(1+x)^{\frac{2n+1}{2}}} + (-1)^{n-1}.n\dfrac{1.3.5...(2n-3)}{2^{n-1}(1+x)^{\frac{2n-1}{2}}}$

e) $y^{(n)} = (\sin x.\ \sin 5x)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k (\sin x)^{(k)}(\sin 5x)^{(n-k)}$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)\sin\left(5x + \frac{(n-k)\pi}{2}\right).5^{n-k}$$

Vậy $y^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k.5^{n-k}\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)\sin\left(5x + \frac{(n-k)\pi}{2}\right)$.

(có thể viết $\sin x\sin 5x = \dfrac{1}{2}(\cos 4x - \cos 6x)$ và tính $y^{(n)}$);

f) $y^{(n)} = \left[x^2\sin 2x\right]^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2)^{(k)}(\sin 2x)^{(n-k)}$

$$= x^2(\sin 2x)^{(n)} + n.2x\,(\sin 2x)^{(n-1)} + n.(n-1)(\sin 2x)^{(n-2)} + 0 = 2^n x^2\sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$+ 2^n.nx.\sin\left(2x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) + 2^{n-2}.n\,(n-1)\sin\left(2x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right)$$

19. a) $y' = A\omega\cos(\omega t + \varphi) - B\omega\sin(\omega t + \varphi)$

$y'' = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) - B\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$

$= -\omega^2(A\sin(\omega t + \varphi) + B\cos(\omega t + \varphi))$. Do vậy $y'' + \omega^2 y = 0$.

b) $y' = \dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

$y'' = \dfrac{-\sqrt{2x-x^2} - (1-x)\dfrac{(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}}{2x-x^2} = \dfrac{-(2x-x^2)-(1-x)^2}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}$. Ta có

$$y^3.y'' = \left(\sqrt{2x-x^2}\right)^3\left[\frac{-(2x-x^2)-(1-x)^2}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}\right] = -2x + x^2 - 1 + 2x - x^2 = -1$$

Do đó $y^3y'' + 1 = 0$.

20. $y' = 4mx^3 - 3x^2 + 4x - 1$; $y'' = 12mx^2 - 6x + 4$

Tính biệt thức $\Delta' = 9 - 48m$. Để y'' = 0 là bình phương của một nhị thức thì $\Delta' = 0$.

Ta suy ra $m = \dfrac{9}{48} = \dfrac{3}{16}$. Khi đó $y'' = 12.\dfrac{3}{16}x^2 - 6x + 4 = \left(\dfrac{3}{2}x - 2\right)^2$

21. a) Ta có $v(t) = 3t^2 - 6t - 9$ nên $v(2) = -9$m/s; b) $\gamma(t) = 6t - 6$ nên $\gamma(3) = 12$ m/s²; c) $v(t) = 0 \Rightarrow t = 3$ nên $v(1) = -12$ m/s².

22. Theo công thức đạo hàm hàm số hợp ta có:

$[f(ax+b)]' = a.f'(ax+b)$. Giả sử công thức đúng cho cấp $(n-1)$ tức là

$[f(ax+b)]^{(n-1)} = a^{n-1}f^{(n-1)}(ax+b)$. Khi đó

$[f(ax+b)]^{(n)} = \{[f(ax+b)]^{(n-1)}\}' = [a^{n-1}f^{(n-1)}(ax+b)]' = a^n f^{(n)}(ax+b)$

Do đó ta có công thức tổng quát: $[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$

trong đó $f^{(n)}(ax+b)$ là đạo hàm cấp n lấy theo biến $(ax+b)$.

Ví dụ : *) $[(ax+b)^m]^{(n)} = a^n.m(m-1)(m-2)...(m-n+1)(ax+b)^{m-n}$

(vì $(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)....(m-n+1)x^{m-n}$

**) $[\sin(ax+b)]^{(n)} = a^n\sin(ax+b+\frac{n\pi}{2})$ (vì $(\sin x)^{(n)} = \sin(x+\frac{n\pi}{2})$)

23. a) Kết quả C) vì $y^{(5)} = 5!\,2^5$ nên $y^{(5)}(2) = 5!\,2^5$

b) Kết quả B) vì $y^{(4)} = 8\cos 2x$ nên $y^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -8.\frac{1}{2} = -4$

c) Kết quả C) vì $y^{(3)} = \frac{2+4\sin^2 x}{\cos^4 x}$ nên $y^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{16}{3}$

d) Kết quả D) vì $y^{(10)} = \frac{10!2^{10}}{(2x-1)^{11}}$ nên $y^{(10)}(0) = -10!\,2^{10}$

e) Kết quả A) vì $y^{(6)} = -\frac{3^6.6!}{(3x+1)^7}$;

f) Kết quả B) vì $y^{(7)} = -3.\,5^7\cos 5x$.

ÔN TẬP CUỐI NĂM

A. ĐỀ BÀI TẬP

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $y = 7\sin(5x-8)+2$ (trên $\mathbb{R}$); b) $y = \sqrt{3\cos 2x+2}-3$ (trên $\mathbb{R}$)

c) $y = \cot x$ trên $\left[\frac{\pi}{4};\frac{2\pi}{3}\right]$

2. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos(5x+80^0) = \frac{1}{2}$

c) $\cot\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)+\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = 0$; d) $\cos 3x = \sin 7x$;

e) $\sin\left(x^2+2x+\frac{\pi}{6}\right) = 0$; f) $\cot(x^2+3) = \tan(2x+1)$.

3. Giải các phương trình sau:

a) $\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0$; b) $\cot^3 x - 5\cot^2 x - 2\cot x + 6 = 0$

c) $5\cos 2x + 3\sin 2x = 6$; d) $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 2$

e) $4\cos x\cos 2x\cos 3x = \cos 6x$; f) $|1-\cos x|+|1-\sin x| = 2+\sqrt{2}$

4. Tìm m để phương trình có nghiệm

a) $2\cos 2x + m\cos x + 5 = 0$; b) $m\sin^2 x + \sin 2x = 1 + \cos^2 x$

c) $(m-1)\sin x + (m+1)\cos x = m\sqrt{2}$;

d) $\tan^2 x + \cot^2 x + m(\tan x + \cot x) + 3 = 0$

5. Giải các bất phương trình lượng giác sau:

a) $\cot(3x+2) < \frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\sin(2x+20^0) \geq \frac{1}{2}$

c) $\tan^2 x - (1+\sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} < 0$; d) $\sqrt{4\sin^2 x - 1} > 1 + 3\sin x$.

6. Một đa giác đều có 16 cạnh . Vẽ các tam giác có các đỉnh là các đỉnh của đa giác. Hỏi :

a) Có thể vẽ được bao nhiêu tam giác như thế?

b) Có bao nhiêu tam giác có đúng 1 cạnh là cạnh của đa giác ?

c) Có bao nhiêu tam giác có đúng 2 cạnh là cạnh của đa giác ?

d) Có bao nhiêu tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác ?

7. Tìm số hạng không chứa x của khai triển Nhị thức Niutơn $\left[2x\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[15]{x^4}}\right]^n$

biết rằng : $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 301$.

8. Một đội văn nghệ của khối học sinh lớp 11 gồm 20 thành viên, trong đó có 8 học sinh lớp A, 7 học sinh lớp B và 5 học sinh lớp C.

a) Chọn ngẫu nhiên ra 2 thành viên của đội để hát song ca. Tìm xác suất để song ca này gồm học sinh của 2 lớp.

b) Chọn ngẫu nhiên ra 3 thành viên của đội để hát tam ca. Tính xác suất để tam ca đó gồm học sinh của ít nhất 2 lớp.

c) Chọn ra 4 thành viên của đội để hát tốp ca. Tìm xác suất để có đủ học sinh của 3 lớp và chỉ có 1 học sinh của lớp C.

9. Có 2 hộp đựng bi. Hộp I có 4 bi màu trắng và 1 bi màu đỏ, hộp II có 3 bi màu trắng và 2 bi màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 bi từ hộp I bỏ sang hộp II rồi lại lấy 2 bi từ hộp II bỏ sang hộp I. Gọi X là số bi trắng ở hộp I sau 2 lần chuyển đổi bi như trên. Hãy lập bảng phân phối xác suất của X.

10. Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,10	0,05	0,15	?	0,20	0,22

a) Tính P(X = 3) và viết biểu thức hàm phân phối của X;

b) Tính P(0,5 ≤ X < 4,2); P(X>3);

c) Tính EX , DX và $\sqrt{DX}$

11. Một cấp số cộng và một cấp số nhân cùng có 6 số hạng, số hạng đầu cùng bằng 1 và số hạng cuối cùng bằng – 32. Hãy xác định các cấp số đó.

12. Một cấp số cộng hữu hạn có tổng tất cả các số hạng, trừ số hạng đầu, bằng – 36, còn tổng tất cả các số hạng, trừ số hạng cuối, bằng 0. Biết $u_{10} - u_6 = -16$. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số đó.

13. Cho ba số: $4x - 3$, $2x^2 + 4$ và $7x + 5$. Xác định x để ba số đó lập thành một cấp số cộng. Viết cấp số cộng đó.

14. Cho một cấp số cộng gồm ba số dương có tổng là 21. Nếu lần lượt thêm các số 2, 3 và 9 vào ba số đó thì được ba số mới lập thành một cấp số nhân. Tìm ba số của cấp số cộng đó.

15. Tìm bốn số nguyên biết: theo thứ tự ba số đầu lập thành cấp số nhân, ba số sau lập thành cấp số cộng, tổng hai số đầu và cuối bằng 14, tổng hai số giữa bằng 12.

16. Tìm giới hạn của các dãy số sau:

a) $\lim \dfrac{2n^3 + 15n^2 - 10n + 7}{5n^3 + 2n - 3}$;

b) $\lim\left(\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2\right)$

c) $\lim(3.\,4^n - 4.\,5^n)$;

d) $\lim \dfrac{3n^2 - \sqrt[3]{n^3 + 2} - n\sqrt{n+1}}{n\sqrt{3n^2 + 1} - 3}$

17. a) Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân lùi vô hạn, biết số hạng thứ hai là $\dfrac{12}{5}$ và tổng của nó là 15.

b) Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,155155155...dưới dạng một phân số

18. Cho dãy (u_n) với $u_1 = 1$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{u_n^2}{2007}$, n ≥ 1.

Hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{u_1}{u_2} + \dfrac{u_2}{u_3} + \ldots + \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$

19. Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x^2 + 7x} - \sqrt{3x + 6}}{x - 1}$;

b) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2 + 7x + 12}{16 - x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 + 3x + 3}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^6 - 3x + 1}}{3x^2 + 1}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^2 - x + 1}{3x^2 + x - 1}\right)^{1-6x}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + 2\tan^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}}$

20. a) Chứng minh hàm số $f(x) = \begin{cases} 3|x| - 2 & x \le -2 \\ \sqrt{3x^2 + 4} & x > -2 \end{cases}$ liên tục tại mọi điểm của ℝ.

b) Chứng minh phương trình $x^3 - 3x^2 - 14x - 9 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2 , x_3 thoả mãn : $x_1 < -1 < x_2 < x_3$.

21. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}{(a+b)x}$ (a, b, c, d, e là các hằng số)

b) $y = \left(x^4 - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} - 3x + 2\right)^5$;   c) $y = 3x^3\cos\sqrt{5x^2 + x - 1}$;

d) $y = \sqrt{1 + \tan\left(2x + \dfrac{1}{x^2} - 3\right)}$;

22. Tìm đạo hàm của các hàm số đến cấp đã chỉ ra:

a) $y = \cot(x^2 + 1)$, y'' ;   b) $y = \dfrac{1}{x^2(x+1)}$, $y^{(n)}$

c) $y = \dfrac{2007x}{x^2 - 5x + 6}$, $y^{(n)}$;   d) $y = 2\cos 3x \sin 2x$, $y^{(4n)}$

23. Tính gần đúng chính xác đến phần vạn các số sau :

a) $\sqrt{0{,}9998}$;   b) $\sqrt{1{,}0002}$;   c) $\sin 44^0 30'$

d) $\tan 31^0$;   e) Thể tích hình cầu bán kính r = 1,02.

24. Tính các tổng sau:

a) $S_1 = 1^2C_n^0 + 2^2C_n^1 + 3^2C_n^2 + \ldots\ldots + n^2C_n^n$

b) $S_2 = n(n-1)C_n^0 + (n-1)(n-2)C_n^1 + (n-2)(n-3)C_n^2 + \ldots\ldots + 2C_n^{n-1} + 1C_n^{n-1}$

25. Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 1$. Gọi A, B, C là 3 điểm trên đồ thị của hàm số có hoành độ tương ứng là – 2; 1 và 2.

a) Hãy tìm trên đồ thị hàm số một điểm M sao cho tiếp tuyến của đồ thị tại M song song với đường thẳng đi qua A và B. Viết phương trình tiếp tuyến đó.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng đi qua A và C.

B. LỜI GIẢI; HƯỚNG DẪN; ĐÁP SỐ

1. a) Trên $\mathbb{R}$ ta có : $|\sin(5x-8)| \leq -1 \Rightarrow -7 \leq 7\sin(5x - 8) \leq 7$. Do đó $y_{\min} = -5$ khi $\sin(5x - 8) = -1$ và $y_{\max} = 9$ khi $\sin(5x - 8) = 1$.

b) Vì $-1 \leq \cos 2x \leq 1$, nên $-1 \leq 3\cos 2x + 2 \leq 5$, mặt khác do phép khai căn bậc hai nên $3\cos 2x + 2 \geq 0$. Như vậy, $-3 \leq y \leq \sqrt{5} - 3$. Vậy $y_{\min} = -3$ khi $3\cos 2x = -2 \Leftrightarrow \cos 2x = -\dfrac{2}{3}$ và $y_{\max} = \sqrt{5} - 3$ khi $\cos 2x = 1$, chẳng hạn khi x = 0

c) Do tính nghịch biến của hàm số y = cotx $[0;\pi]$ mà $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{2\pi}{3}\right] \subset [0;\pi]$ nên y = cotx nghịch biến trên $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{2\pi}{3}\right]$, do đó $y_{\min} = \cot\dfrac{2\pi}{3} = \cot\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cot\dfrac{\pi}{3}$

$= -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ và $y_{\max} = \cot\dfrac{\pi}{4} = 1$.

2. a) Vì $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ nên ta có :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{3} - 3x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ \dfrac{\pi}{3} - 3x = \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{9} + k\dfrac{2\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) Đáp số : $-4^0 + k72^0$ và $-28^0 + k72^0$ ($k \in \mathbb{Z}$).

c) Ta có: $\tan(-3x) + \tan\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \tan\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \tan 3x$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

d) Đáp số $x = \dfrac{\pi}{20} + k\dfrac{\pi}{5}$ và $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

e) Phương trình tương đương với: $x^2 + 2x + \dfrac{\pi}{6} - k\pi = 0 \Leftrightarrow$

$x = -1 \pm \sqrt{1 - \dfrac{\pi}{6} + k\pi}$ ($k \in N$).

f) Đáp số : $x = -1 \pm \sqrt{\dfrac{\pi}{2} - 3 + k\pi}$ ($k \in N^*$).

3. a) Phương trình tương đương với (áp dụng công thức $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$):

$$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x = -1 & (*) \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} & (**) \end{array}\right. \quad (*) \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi\,;$$

(**) $\Leftrightarrow$ x $= \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$ (k$\in\mathbb{Z}$). Vậy nghiệm của phương trình là: x= (2k +1) π và x $= \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$ (k$\in\mathbb{Z}$). b) Đặt cotx = t, ta được $t^3 - 5t^2 - 2t + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t^2-4t-6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2+2\sqrt{2} \\ t=2-2\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot x=1 \\ \cot x=2+2\sqrt{2} \\ \cot x=2-2\sqrt{2} \end{array}\right. .$$

Vậy nghiệm của phương trình là : x$=\dfrac{\pi}{4} + k\pi$; x = arccot$\left(2+2\sqrt{2}\right) + k\pi$ và x = arccot$\left(2-2\sqrt{2}\right) + k\pi$ (k$\in\mathbb{Z}$).

c) Phương trình có dạng thuần nhất bậc nhất đối với sin2x và cos2x với a = 5, b = 3 và c = 6. Ở đây ta thấy $a^2 + b^2 = 25 + 9 = 34 < c^2 = 36$. Vậy phương trình là vô nghiệm.

d) Phương trình tương đương với : 3 sinx cosx – 5cos²x = 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \tan x = \dfrac{5}{3} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \arctan\dfrac{5}{3} + k\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

e) Nhân cả hai vế với sinx (dễ thấy sinx = 0 không phải là nghiệm của phương trình) ta được : 4sinx cosxcos2x cos3x = sinx cos6x $\Leftrightarrow$ 2sin2x cos2x cos3x = sinx cos6x $\Leftrightarrow$ sin4x cos3x = sinx cos6x $\Leftrightarrow$ sin7x + sinx = sin7x + sin (– 5x) $\Leftrightarrow$

$$\sin x = \sin(-5x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -5x + k2\pi \\ x = \pi + 5x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

f) Vì cosx và sinx$\leq$1 nên 1 – cosx và 1 – sinx $\geq$0. Vậy ta có thể bỏ dấu giá trị tuyệt đối và đưa về phương trình tương đương: cosx + sinx = $-\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \ \ (k \in Z).$$

4. a) Dùng công thức cos2x = 2cos²x – 1 và đặt t = cosx ($|t| \leq 1$) đưa về phương trình: $4t^2 + mt + 3 = 0$ (*). Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0$, tức là $m^2 - 48 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 4\sqrt{3} \\ m \leq -4\sqrt{3} \end{array}\right.$. Ta thấy trong trường hợp này, nếu (*) có hai nghiệm t_1 và t_2 thì $t_1.t_2 = \dfrac{3}{4} < 1$, tức là có ít nhất một nghiệm thoả mãn $|t| \leq 1$.

Vậy m$\in \left(-\infty;-4\sqrt{3}\right] \cup \left[4\sqrt{3};+\infty\right)$.

b) Áp dụng công thức hạ bậc đưa phương trình đã cho về phương trình tương đương: 2sin2x – (m + 1) cos2x = 3 – m. Để phương trình này có nghiệm thì:

$$2^2 + [-(m+1)]^2 \geq (3-m)^2 \Leftrightarrow 8m \geq 4 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}.$$

c) Đáp số : $\forall m \in \mathbb{R}$ d) Hướng dẫn: Đặt tanx + cotx = t (|t| $\geq$ 2) có phương trình ẩn t: $t^2 + mt + 1 = 0$ (*). Xét hai trường hợp : (*) có một nghiệm thuộc $[-2;2]$ và nghiệm còn lại không thuộc khoảng đó, khi đó f(2).f(– 2) $\leq$0 (f(t)= $t^2 + mt + 1$); trường hợp thứ hai cả hai nghiệm của (*) không thuộc $[-2;2]$. Ta có đáp số là:

m$\leq -\dfrac{5}{2}$ và m$\geq \dfrac{5}{2}$;

5. a) Dựa trên phương trình lượng giác ta có:

$\dfrac{\pi}{3} + k\pi < 3x + 2 < \pi + k\pi \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{3} - 2 + k\pi\right) < x < \dfrac{1}{3}(\pi - 2 + k\pi)$ với (k$\in\mathbb{Z}$) (vì $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \cot\dfrac{\pi}{3}$ và y = cotx nghịch biến trên $[0;\pi]$).

b) Đáp số là: $5^0 + k180^0 \leq x \leq 65^0 + k\,180^0$.

c) Hướng dẫn : Bất phương trình tương đương với 1 < tanx < $\sqrt{3}$ và có đáp số : $\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

d) Đặt sinx = t với $|t| \leq 1$ có bất phương trình (ẩn t): $\sqrt{4t^2 - 1} > 1 + 3t$ (*). Vì:

$4t^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{2}$ và $t \leq \frac{1}{2}$. Vậy ta phải xét hai khoảng: $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ và $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Với $t \in \left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ vế trái của (*) ≥ 0, còn vế phải < 0 nên bất đẳng thức thoả mãn, như vậy ta có $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ và ta có nghiệm là $\frac{7\pi}{6} + k2\pi < x < \frac{11\pi}{6}$ (dựa trên đường tròn lượng giác). Với $t \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ bình phương hai vế của (*) ta có :

$4t^2 - 1 > 1 + 9t^2 + 6t \Leftrightarrow 5t^2 + 6t + 2 < 0$, bất phương trình vô nghiệm vì $\Delta' = 9 - 10 < 0$. Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là : $\frac{7\pi}{6} + k2\pi < x < \frac{11\pi}{6} + k2\pi$.

6. a) Đa giác 16 cạnh tức là có 16 đỉnh. Cứ 3 đỉnh vẽ được một tam giác nên số tam giác có các đỉnh là đỉnh của đa giác là $C_{16}^3 = \frac{16!}{3!13!} = 560$;

b) Kí hiệu các đỉnh liên tiếp của đa giác là $A_1, A_2, ..., A_{16}$ thì số tam giác mà mỗi tam giác có đúng 2 cạnh là cạnh đa giác là 16 ; đó là các tam giác $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$,..., $A_{16}A_1A_2$;

c) Chọn ra 1 cạnh của đa giác và bỏ đi 2 cạnh ở 2 bên cạnh vừa lấy ra thì chỉ còn 12 đỉnh mà mỗi đỉnh có thể lập với cạnh đã chọn ra để được tam giác chỉ có 1 cạnh của nó là cạnh của đa giác. Vì 16 cạnh có thể được chọn ra nên số tam giác có 1 cạnh là cạnh của đa giác là 16. 12 = 192 tam giác. d) Số tam giác không chứa cạnh nào của đa giác bằng số tất cả tam giác vẽ được trừ đi số tam giác có đúng 2 cạnh là cạnh của đa giác và trừ đi số tam giác có đúng 1 cạnh là cạnh của đa giác tức là bằng 560 – 16 – 192 = 352 tam giác.

7. Ta có $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 301$ hay $n^2 + n - 600 = 0$.

Giải ra được n = 24 và n = – 25 (bị loại). Do đó $\left(2x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[15]{x^4}}\right)^{24}$

$= \sum_{k=0}^{24} C_{24}^k 2^{24-k} x^{\frac{4}{3}(24-k)} . x^{-\frac{4k}{15}}$. Để số hạng không phụ thuộc x thì:

$\frac{4}{3}(24 - k) - \frac{4k}{15} = 0$ hay $32 - \frac{4}{3}k - \frac{4k}{15} = 0 \Leftrightarrow 32 - \frac{24k}{15} = 0 \Leftrightarrow k = 20$.

Do đó hệ số của số hạng không phụ thuộc x là : $2^{24-20}.C_{24}^{20} = 170016$

8. a) Phép thử là chọn ra 2 thành viên trong đội có 20 người nên $n = C_{20}^2 = 190$

Số trường hợp thuận lợi cho biến cố “ 2 thành viên chọn ra thuộc 2 lớp” là

m = 8.7 + 7.5 + 5.8 = 131. Do đó xác suất cần tìm là $\frac{m}{n} = \frac{131}{190} \approx 0,6894$

b) $n = C_{20}^3 = 1140$;

$m = C_8^1.C_7^2 + C_8^2.C_7^1 + C_8^1.C_5^2 + C_8^2.C_5^1 + C_7^1.C_5^2 + C_7^2.C_5^1 + C_8^1.C_7^1.C_5^1$

= 168 + 196 + 80 + 140 + 70 + 105 + 280 = 1039. Xác suất cần tìm là:

$\frac{m}{n} = \frac{1039}{1140} = 0,9114$; c) $n = C_{20}^4 = 4845$.

$m = 5.\ C_8^2.C_7^1 + 5.\ C_8^1.C_7^2 = 1820$. Xác suất cần tìm là $\frac{1820}{4845} \approx 0,3756$

9. X nhận xác giá trị 2, 3, 4, 5. “X = 2” là do lấy ra 2 bi trắng từ hộp I bỏ sang hộp II rồi lấy 2 bi đỏ từ hộp II bỏ sang hộp I. Do đó

$P(X = 2) = \frac{C_4^2}{C_5^2}.\frac{C_2^2}{C_7^2} = \frac{6}{210} = \frac{1}{35}$ (vì khi đã bỏ 2 bi từ hộp I sang II thì trước khi lấy tiếp bi từ hộp II bỏ sang hộp I, hộp II có 7 bi). “X = 3” là do lấy 2 bi trắng từ hộp I bỏ sang hộp II rồi lấy 1 bi trắng và 1 bi đỏ từ hộp II bỏ sang hộp I hoặc lấy 1 bi trắng và 1 bi đỏ từ I bỏ sang II rồi lấy 2 bi đỏ từ II bỏ sang I. Do đó

$P(X = 3) = \frac{C_4^2}{C_5^2}.\frac{C_5^1.C_2^1}{C_7^2} + \frac{C_4^1.C_1^1}{C_5^2}.\frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{72}{210} = \frac{12}{35}$

Tương tự $P(X = 4) = \frac{108}{210} = \frac{18}{35}$ và $P(X = 5) = \frac{24}{210} = \frac{4}{35}$. Vì vậy X có bảng phân phối xác suất là:

X	2	3	4	5
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

10. a) P(X = 3) = 1 – 0,10 – 0,005 – 0,15 – 0,20 – 0,22 = 0,28.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 0{,}10 & 0 < x \le 1 \\ 0{,}15 & 1 < x \le 2 \\ 0{,}30 & 2 < x \le 3 \\ 0{,}58 & 3 < x \le 4 \\ 0{,}78 & 4 < x \le 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$

b)P(0,5 ≤ X < 4,2) = F(4,2) – F(0,5) = 0,78 – 0,10 = 0,68.

P(X > 3) = 1 – P(X ≤ 3) = 1- (P(X < 3) + P(X = 3)) = 1 – F(3) – P(X=3)

= 1 – 0,30 – 0,28 = 0, 42. Ta cũng có thể tính trực tiếp từ bảng phân phối như sau:

P(0,5 ≤ X < 4,2) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)

= 0,05 + 0,15 + 0,28 + 0,20 = 0,68; P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5)

= 0,20 + 0,22 = 0,42.

c) EX = 0.0,10 + 1.0,05 + 2.0,15 + 3.0,28 + 4.0,20 + 5.0,22 = 3,09; DX $=0^2.0{,}10$ $+1^2.0{,}05 +2^2.0{,}15 +3^2.0{,}28 +4^2.0{,}20 + 5^2.0{,}22 - 3{,}09^2 = 2{,}3219$; $\sqrt{DX} = 1{,}5237$.

11. Chỉ cần tìm công sai d của cấp số cộng và công bội q của cấp số nhân xuất phát từ đầu bài. Ta có: 1 + 5d = – 32 $\Rightarrow d = -\frac{33}{5}$ và $1.q^5 = -32 \Rightarrow q = -2$. Vậy ta có:

÷÷ 1; – 2; 4; –8; 16; –32 và ÷ 1; $-\frac{28}{5}$; $-\frac{61}{5}$; $-\frac{94}{5}$; $-\frac{127}{5}$; $-\frac{160}{5} = -32$.

12. Giả sử ta có : ÷ $u_1, u_2, ..., u_n$. Theo đầu bài thì $u_2 + u_3 + ... + u_n = -36$ (1); $u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} = 0$ (2). Lấy (2) – (1) vế theo vế ta có $u_1 - u_n = 36$, kết hợp điều kiện : $u_{10} - u_6 = -16$, ta có hệ $\begin{cases} u_1 - u_n = 36 \\ u_6 - u_{10} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - [u_1 + (n-1)d] = 36 \\ u_1 + 5d - (u_1 + 9d) = 16 \end{cases}$.

Từ phương trình sau suy ra d = – 4, thay vào phương trình đầu ta có: n = 10. Thay vào (2) ta có: $S_9 = u_1 + ... + u_9 = 0$ tức là : $\frac{9}{2}[2u_1 + 8.(-4)] = 0$

$\Rightarrow u_1 = 16$. Vậy ta có : ÷ 16; 12; 8; ..; – 20.

13. Theo tính chất của cấp số cộng ta có:

$2(2x^2 + 4) = (4x - 3) + (7x + 5) \Leftrightarrow 4x^2 - 11x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ và $x = \frac{3}{4}$. Ứng với chúng ta có hai cấp số cộng sau: ÷ 5; 12; 19 và ÷ 0; $\frac{41}{8}$; $\frac{41}{4}$.

14. Giả sử ÷ a, b, c. Từ đề bài : a + b + c = 21 (*). Theo tính chất của cấp số cộng, có 2b = a + c và thay vào (*) ta được 3b = 21 ⇔ b = 7 và từ đó 14 = a + c

⇒ c = 14 – a . Cũng theo đầu bài có ÷÷ a + 2 ; b + 3; c + 9,

tức là có ÷÷ a + 2; 10; 23 – a . Theo tính chất của cấp số nhân ta có:

$100 = (a + 2)(23 - a) \Leftrightarrow a^2 - 21a + 54 = 0 \Rightarrow a = 18$ và a = 3. Từ đó có hai cấp số cộng : ÷ 18; 7; – 4

(loại vì phải là ba số dương) và ÷ 3; 7; 11 (thoả mãn). Đáp số : ÷ 3; 7; 11.

15. Giả sử 4 số phải tìm theo thứ tự là a, b, c, d. Theo đề bài có ÷÷ a, b, c và ÷÷ b, c, d, ngoài ra a + d = 14 (1) và b + c = 12 (2). Theo tính chất của cấp số nhân thì $b^2 = ac$ (*). Theo cấp số cộng có b+d = 2c hay 3c = b + d + c, từ (1) và (2) có:

3c = 12 + 14 – a ⇒ a =26 – c và từ (2) thì b = 12 – c. Thay a và b vào (*), có :

$(12 - c)^2 = (26 - c)c \Leftrightarrow 2c^2 - 25c + 72 = 0 \Leftrightarrow c = 8$ và $c = \frac{9}{2}$

(loại vì không nguyên). Đáp số : Bốn số cần tìm là: 2, 4, 8, 12.

16. a) $\lim \frac{2n^3 + 15n^2 - 10n + 7}{5n^3 + 2n - 3} = \lim \frac{2 + \frac{15}{n} - \frac{10}{n^2} + \frac{7}{n^3}}{5 + \frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3}} = \frac{2}{5}$

b) $\lim\left(\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2\right) = \lim \frac{n^4 + n^2 + 1 - n^4}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1} + n^2} = \frac{1}{2}$

c) $\lim(3.4^n - 4.5^n) = \lim 5^n\left(3\left(\dfrac{4}{5}\right)^n - 4\right) = -\infty$.

d) $\lim\dfrac{3n^2 - \sqrt[3]{n^3+2} - n\sqrt{n+1}}{n\sqrt{3n^2+1} - 3} = \lim\dfrac{3 - \sqrt[3]{\dfrac{1}{n^3} + \dfrac{2}{n^6}} - \sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}}{\sqrt{3 + \dfrac{1}{n^2}} - \dfrac{3}{n^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

17. a) Ta có $S = \dfrac{u_1}{1-q} = 15$ và $u_1 q = \dfrac{12}{5}$ hay $15(1 - q)q = \dfrac{12}{5}$

$\Leftrightarrow 15q^2 - 15q + \dfrac{12}{5} = 0$. Giải ra được $q = \dfrac{1}{5}$, $u_1 = 12$ và $q = \dfrac{4}{5}$, $u_1 = 3$.

b) $0,155155155... = \dfrac{155}{10^3} + \dfrac{155}{10^6} + \dfrac{155}{10^9} + ... = \dfrac{155}{10^3}\left(1 + \dfrac{1}{10^3} + \dfrac{1}{10^6} + ...\right)$

$= \dfrac{155}{10^3}.\dfrac{10^3}{999} = \dfrac{155}{999}$.

18. Ta có $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{u_n^2}{u_n.u_{n+1}} = \dfrac{2007(u_{n+1} - u_n)}{u_n.u_{n+1}} = 2007\left(\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{u_1}{u_2} + \dfrac{u_2}{u_3} + ... + \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = 2007\left(\dfrac{1}{u_1} - \dfrac{1}{u_{n+1}}\right) = 2007\left(1 - \dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$

Mặt khác $1 < u_1 < u_2 < ... < u_n < u_{n+1}$ tức là (u_n) là dãy tăng.

Giả sử (u_n) bị chặn trên thì $\lim u_n = a > 1$. Nhưng khi đó từ điều kiện

$u_{n+1} = u_n + \dfrac{u_n}{2007} \Rightarrow a = a + \dfrac{a}{2007}$ tức $a = 0$. Điều này vô lý.

Vì vậy (u_n) không bị chặn trên . Do đó $\lim(u_n) = +\infty$ hay $\lim\dfrac{1}{u_n} = 0$.

Vậy $\lim\left(\dfrac{u_1}{u_2} + \dfrac{u_2}{u_3} + ... + \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \lim 2007\left(1 - \dfrac{1}{u_{n+1}}\right) = 2007$.

19. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x^2+7x} - \sqrt{3x+6}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+7x-3x-6}{(x-1)\left(\sqrt{2x^2+7x} + \sqrt{3x+6}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)(x+3)}{(x-1)\left(\sqrt{2x^2+7x} + \sqrt{3x+6}\right)} = \dfrac{2.4}{\sqrt{9}+\sqrt{9}} = \dfrac{4}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+7x+12}{16-x^2} = \lim\limits_{x\to -4}\dfrac{(x+3)(x+4)}{(4-x)(4+x)} = -\dfrac{1}{8}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-5x-1} - \sqrt{x^2+3x+3}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-8x-4}{\sqrt{x^2-5x-1} + \sqrt{x^2+3x+3}}$

$= \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-8x-4}{-x\left(\sqrt{1 - \dfrac{5}{x} - \dfrac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^2}}\right)} = 4.$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{2x^6-3x+1}}{3x^2+1} = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x^3\sqrt{2 - \dfrac{3}{x^5} + \dfrac{1}{x^6}}}{3x^2+1}$

$= \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-\sqrt{2 - \dfrac{3}{x^5} + \dfrac{1}{x^6}}}{\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^3}} = +\infty$ (do mẫu số âm)

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{3x^2+x-1}\right)^{1-6x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{2-2x}{3x^2+x-1}\right)^{1-6x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{2-2x}{3x^2+x-1}\right)^{\frac{3x^2+x-1}{2-2x}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2-2x)(1-6x)}{3x^2+x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2-2x)(1-6x)}{3x^2+x-1}} = e^4$

f) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + 2\tan^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 + \dfrac{2}{\cot^2 x}\right)^{\frac{\cot^2 x}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x\cos^2 x}} = e^2$

20. a) Hàm f(x) liên tục tại mọi điểm $x \neq -2$. Xét tại điểm $x = -2$, ta có:

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-}(3|x| - 2) = 4$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+}\sqrt{3x^2+4} = 4$

Do đó $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^{\cdot}} f(x) = f(-2)$ nên f(x) liên tục tại x = 2 tức f(x) liên tục tại mọi điểm của $\mathbb{R}$ (đpcm):

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 14x - 9$ liên tục tại mọi điểm của $(-\infty ; +\infty)$. Ta có:

$f(-1) = 1 > 0$. Mặt khác $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ nên tồn tại một số $c < -1$ để $f(c) < 0$. Do đó phương trình f(x) = 0 có 1 nghiệm x_1 trong (c; − 1) hay $c < x_1 < -1$.

Ta có f(0) = − 9 < 0 nên phương trình f(x) = 0 có 1 nghiệm $x_2 \in (-1 ; 0)$

tức $-1 < x_2 < 0$. Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ nên tồn tại một số d > 0 để f(d) > 0.

Vì vậy phương trình f(x) = 0 có 1 nghiệm $x_3 \in (0 ; d)$ tức $0 < x_3 < d$. Điều này có nghĩa là phương trình f(x) = 0 có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thoả mãn:

$x_1 < -1 < x_2 < x_3$ (vì $c < x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < 0$) (đpcm)

21.a) $$y' = \frac{(a+b)x(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d) - (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)(a+b)}{x^2(a+b)^2}$$

$$y' = \frac{3ax^4 + 2bx^3 + cx^2 - e}{(a+b)x^2};$$

b) $$y' = 5\left(x^4 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} - 3x + 2\right)^4\left(4x^3 + \frac{6}{x^4} - \frac{2}{x^3} - 3\right)$$

c) $$y' = 9x^2 \cos\sqrt{5x^2 + x - 1} - \frac{3x^3(10x+1)\sin\sqrt{5x^2 + x - 1}}{2\sqrt{5x^2 + x + 1}}$$

d) $$y' = \frac{1 - \frac{1}{x^3}}{\cos^2\left(2x + \frac{1}{x^2} - 3\right)\sqrt{1 + \tan\left(2x + \frac{1}{x^2} + 3\right)}}$$

22. a) $$y' = -\frac{2x}{\sin^2(x^2+1)}\ ;\ y'' = -\frac{2\sin(x^2+1) - 8x^2\cos(x^2+1)}{\sin^3(x^2+1)}$$

b) $$y^{(n)} = \left[\frac{1}{x^2(1+x)}\right]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{x^2}\right)^{(k)}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k (k+1)!x^{-(2+k)}.(-1)^{(n-k)} \frac{(n-k)!}{(1+x)^{n-k+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^n C_n^k \frac{(k+1)!(n-k)!}{x^{k+2}(1+x)^{n-k+1}}$$

c) $$y^{(n)} = \left(\frac{2007x}{x^2 - 5x + 6}\right)^{(n)} = 2007\left(\frac{3}{x-3} - \frac{2}{x-2}\right)^{(n)}$$

$$= (-1)^n.\ n!\ 2007\left(\frac{3}{(x-3)^{n+1}} - \frac{2}{(x-2)^{n+1}}\right)$$

d) $y^{(4n)} = (2\cos3x\sin2x)^{(4n)} = (\sin5x - \sin x)^{(4n)} = 5^{4n}\sin5x - \sin x$ (xem IV.Ch.V)

23. a) $\sqrt{0,9998} = \sqrt{1 - 0,0002} \approx 1 - \dfrac{0,0002}{2} = 0,9999$

b) $\sqrt{1,0002} = \sqrt{1 + 0,0002} \approx 1 + \dfrac{0,0002}{2} = 1,0001$

c) $\sin44^0 30' = \sin(45^0 - 30') \approx \sin45^0 + \cos45^0 \dfrac{\pi}{360} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \dfrac{\pi}{360}\right)$

d) $\tan31^0 = \tan(30^0 + 1^0) \approx \tan30^0 + \dfrac{1}{\cos^2 30^0}.\dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\pi}{135}$.

e) $V(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ nên V(1,02) = V(1 + 0,02)

hay $V(1,02) \approx V(1) + V'(1).0,02 = \dfrac{4\pi}{3}.1^3 + \dfrac{4.\pi.3}{3}.1^2.0,02 = \dfrac{4,24\pi}{3}$

(Tính chính xác $V(1,02) = \dfrac{4,244832\pi}{3}$)

24. a) Ta có: $(1+x)^n = 1C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + \ldots\ldots + x^nC_n^n$.

Đạo hàm 2 vế ta được: $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + 3x^2C_n^3 \ldots\ldots + nx^{n-1}C_n^n$.

Nhân 2 vế với x được: $\Rightarrow nx(1+x)^{n-1} = xC_n^1 + 2x^2C_n^2 + 3x^3C_n^3 \ldots\ldots + nx^nC_n^n$.

Đạo hàm 2 vế ta được:

$n((1+x)^{n-1} + x(n-1)(1+x)^{n-2}) = C_n^1 + 2.2xC_n^2 + 3.3x^2C_n^3 \ldots\ldots + n.nx^{n-1}C_n^n$.

Cho x = 1 ta được:

$n((1+1)^{n-1} + (n-1)(1+1)^{n-2}) = C_n^1 + 2.2C_n^2 + 3.3C_n^3 \ldots\ldots + n.nC_n^n$. Do đó:

$$S_1 = C_n^1 + 2^2C_n^2 + 3^2C_n^3 ..... + n^2C_n^n = n.2^{n-2}(n-1+2) = n.(n+1)2^{n-2}$$

b) $(x+1)^n = C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1} + C_n^2x^{n-2} + ... + C_n^{n-1}x + C_n^n$. Đạo hàm 2 vế được:

$$n(x+1)^{n-1} = nC_n^0x^{n-1} + (n-1)C_n^1x^{n-2} + (n-2)C_n^2x^{n-3} + ... + 2C_n^{n-2}x + C_n^{n-1}.$$

Đạo hàm 2 vế đẳng thức trên ta được:

$$n(n-1)(x+1)^{n-2} = n(n-1)C_n^0x^{n-2} + (n-1)(n-2)C_n^1x^{n-3} + ... + 2C_n^{n-2}.$$

Cho x = 1 ta được:

$$n(n-1)(1+1)^{n-2} = n(n-1)C_n^0 + (n-1)(n-2)C_n^1 + ... + 2C_n^{n-2} = n(n-1)2^{n-2}$$

Do đó $S_2 = n(n-1)C_n^0 + (n-1)(n-2)C_n^1 + ... + 2C_n^{n-2} + 1C_n^{n-1} = n(n-1)2^{n-2} + n$

25. Ta có A(– 2 ; – 1) ; B (1 ; 2) và C (2 ; 7).

a) Vì đường thẳng đi qua A và B có phương trình là : $\dfrac{x-1}{-2-1} = \dfrac{y-2}{-1-2}$ hay y = x + 1; nên tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 1$ tại điểm $M(x_0 ; y_0)$ song song với đường thẳng y = x + 1 phải có hệ số góc là 1 tức là $2x_0 + 2 = 1$ hay $x_0 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y_0 = -\dfrac{7}{4}$. Do đó điểm M cần tìm có toạ độ là $M\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{7}{4}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại M là :

$$y = 1\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{7}{4} = x - \frac{5}{4} \text{ hay } y = x - \frac{5}{4}.$$

b) Vì đường thẳng đi qua A và C có phương trình là: $\dfrac{x-2}{-2-2} = \dfrac{y-7}{-1-7}$ hay y = 2x + 3 nên đường tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng y = 2x + 3 phải có hệ số góc là $-\dfrac{1}{2}$. Giả sử tiếp điểm của tiếp tuyến có hoành độ là x_0 thì $2x_0 + 2 = -\dfrac{1}{2}$ hay $x_0 = -\dfrac{5}{4}$. Do đó phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{4}\right) + \left(-\frac{5}{4}\right)^2 + 2.\left(-\frac{5}{4}\right) - 1 = -\frac{1}{2}x - \frac{41}{16} \text{ hay } y = -\frac{1}{2}x - \frac{41}{16}.$$

MỤC LỤC

Lời nói đầu 3

Phần I. LÍ THUYẾT VÀ ĐỀ BÀI TẬP

Chương I. Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác

I. Hàm số tuần hoàn và hàm số lượng giác 5
II. Phương trình lượng giác 13
III. Bất phương trình lượng giác cơ bản 29

Chương II. Tổ hợp. Khái niệm xác suất

I. Hai quy tắc đếm cơ bản 35
II. Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp, nhị thức Niu-tơn 39
III. Phép thử ngẫu nhiên và biến cố 49
IV. Xác suất của biến cố 54
V. Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc 63

Chương III. Dãy số. Cấp số cộng. Cấp số nhân

I. Dãy số 73
II. Cấp số cộng 81
III. Cấp số nhân 87

Chương IV. Giới hạn

I. Giới hạn của dãy số 93
II. Giới hạn của hàm số 102
III. Hàm số liên tục 112

Chương V. Đạo hàm

I. Đạo hàm và ý nghĩa của đạo hàm 116
II. Các quy tắc và công thức tính đạo hàm 123
III. Vi phân 130
IV. Đạo hàm cấp cao 134

Phần II. LỜI GIẢI. HƯỚNG DẪN. ĐÁP SỐ

Chương I.....139
Chương II.....158
Chương III.....171
Chương IV.....182
Chương V.....194

PHẦN ÔN TẬP CUỐI NĂM

A. Đề bài tập.....206
B. Lời giải. Hướng dẫn. Đáp số.....210